



TESIS DOCTORAL

Estudio numérico y experimental de un eje giratorio fisurado. Determinación del Factor de Intensidad de Tensiones

Autor:

Laura Montero García

Director/es:

M^a Lourdes Rubio Ruiz de Aguirre

M^a Belén Muñoz Abella

Tutor:

M^a Belén Muñoz Abella

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

Leganés, Julio de 2017

TESIS DOCTORAL

Estudio numérico y experimental de un eje giratorio fisurado. Determinación del Factor de Intensidad de Tensiones

Autor:

Laura Montero García

Director/es:

M^a Lourdes Rubio Ruiz de Aguirre

M^a Belén Muñoz Abella

Firma del Tribunal Calificador:

Firma

Presidente: José Fernández Sáez

Vocal: Francisco Javier Campa

Secretario: Alfonso Fernández del Rincón

Calificación:

Leganés, Julio 2017

El éxito es la suma de varios esfuerzos que se repiten cada día.

R. Collier

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero agradecer a mis tutoras, las profesoras Lourdes Rubio Ruiz de Aguirre y Belén Muñoz Abella, por haberme dado la oportunidad de trabajar con ellas y poder realizar esta Tesis. Muchas gracias por toda la ayuda y dedicación que me han ofrecido durante la realización de este trabajo.

A mi compañera Patricia, por ofrecerme su ayuda y confianza en todo momento.

Al Ministerio de Ciencia e Innovación por el apoyo para este trabajo a través de los Proyectos DPI2009-13264 y DPI2006-09906.

A todo el Departamento de Ingeniería Mecánica, en especial a los profesores Henar Miguélez, Ana Muñoz y Xavier Soldani por el ánimo que me han dado a lo largo de la realización de este trabajo.

Al resto de compañeros que me han acompañado durante este tiempo, Borja, Javier, Alain, Carlos, Chema, Héctor, Norberto, Miguel, Antonio y Jose.

A mis padres, Esperanza y Manuel, que son un referente para mí y que siempre me apoyan en todo incondicionalmente. A mi hermano Javier porque siempre está ahí para echarme una mano. Gracias a los tres por vuestro cariño.

A toda mi familia y amigos, porque de una forma u otra han estado ahí apoyándome. En especial a Maribel y Antonio por haberme dado tantos ánimos y cariño, sobretodo en el último tramo del camino.

A Sergio, por la paciencia que ha demostrado apoyándome y dándome fuerzas en los momentos más duros. Sin ti, no lo habría conseguido.

A Paula, mi pequeña, que lo es todo para mí y consigue hacerme reír cada día.

ABSTRACT

In this PhD Thesis it has been studied the behaviour of cracked shafts through experimental techniques and numeric way. For that, it was studied the horizontal and vertical displacements of the central point of a shaft at the central section. In the same way, it has been studied the orbit described by that section that let determinate firstly, the presence of the crack and secondly, determinate the critical speed. It is presented the procedure to find out the critical speed through the results obtained of the frequency spectrum. It is presented a methodology to determinate the crack depth according to the rotation speed. It has been analyzed the influence crack depth and the orientation of the eccentric mass on the orbits and the frequency spectrum for different rotation speeds.

Apart from that, it has been developed by the Finite Element Method (FEM) a dynamic numeric tridimensional model of a modified Jeffcott Rotor through it has been simulated the rotation at different speeds and it has been studied the dynamic behaviour of a cracked shaft which presents an imbalance produced by an eccentric mass. Through this model, for different rotation speed, it has been analyzed the influence of the crack depth. This model is valid with the experimental results obtained in this project and others authors.

It has been calculated the SIF on the whole crack front through the displacement method of the different faces that form the crack, which have been obtained through to the solution of the dynamic numeric tridimensional model developed. It has been analyzed the influence of the crack depth for different rotation speeds and a comparison has been made between the SIF obtained by the Quasi-static model and the dynamic SIF.

RESUMEN

En esta Tesis Doctoral se ha realizado el estudio del comportamiento de ejes fisurados por técnicas experimentales y de forma numérica. Para ello se han estudiado los desplazamientos horizontales y verticales del punto central de un eje en su sección central. Así mismo se ha estudiado la órbita descrita por dicha sección, mediante la que es posible determinar en primer lugar la presencia de la fisura y en segundo lugar, determinar cual es la velocidad crítica. Se presenta un procedimiento para averiguar la velocidad crítica a partir de los resultados obtenidos del espectro de frecuencias. Se presenta una metodología para la determinación de la profundidad de la fisura en función de la velocidad de giro. Se ha analizado la influencia de la profundidad de la fisura y la orientación de la masa excéntrica sobre las órbitas y el espectro de frecuencias para distintas velocidades de giro.

Por otra parte se ha desarrollado mediante el Método de Elementos Finitos (MEF) un modelo numérico dinámico tridimensional de un Jeffcott Rotor modificado mediante el que se simula el giro a distintas velocidades y con el que se ha estudiado el comportamiento dinámico de un eje fisurado que presenta un desequilibrio producido por una masa excéntrica. A partir de este modelo y para las distintas velocidades de giro se ha realizado un análisis de la influencia de la profundidad de la fisura. Dicho modelo es validado con los resultados experimentales obtenidos en este trabajo y con los de otros autores de la literatura.

Se ha calculado el FIT en todo el frente de fisura a partir de los desplazamientos de las caras de la fisura, obtenidos de la solución del modelo numérico dinámico tridimensional desarrollado. Se ha analizado la influencia de la profundidad de la fisura para diferentes velocidades de giro y se ha realizado una comparación entre el FIT obtenido de un modelo cuasiestático y el FIT dinámico.

ÍNDICE GENERAL

1	INTRODUCCIÓN	1
1.1	Motivación	3
1.2	Objetivos	4
1.3	Contenido	5
2	ANTECEDENTES	7
2.1	Dinámica de ejes	9
2.1.1	Órbitas	13
2.1.2	Defectos en un rotor	14
2.1.3	Diagnóstico de defectos en rotores	15
2.2	Dinámica de ejes fisurados	20
2.2.1	Comportamiento de apertura y cierre de la fisura en ejes rotatorios	29
2.2.2	Órbitas de un eje fisurado	33
2.2.3	Análisis del comportamiento de un eje fisurado en el dominio de la frecuencia. Transformada Rápida de Fourier (FFT)	43
2.3	Mecánica de la Fractura	48
2.3.1	Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL)	48
2.3.2	Cálculo del FIT en ejes fisurados rotatorios	50
2.3.3	Propagación de fisuras	54
3	TÉCNICAS EXPERIMENTALES	57
3.1	Metodología de ensayo	59
3.1.1	Dispositivos experimentales	59
3.1.1.1	Banco de ensayos de ejes giratorios	59
3.1.1.2	Máquina de fisuración por resonancia	64
3.1.1.3	Video-microscopio de medición 2D Swift Duo	67
3.1.2	Metodología de ensayos	68
3.1.3	Ensayos realizados	70
3.2	Resultados experimentales	70
3.2.1	Determinación de la presencia de una fisura	71
3.2.2	Identificación de la fisura	76
3.2.2.1	Cálculo de la velocidad crítica a partir de los datos experimentales	76

3.2.3	Discusión de resultados	80
3.2.3.1	Estudio de la profundidad de la fisura inicial . . .	81
3.2.3.2	Estimación de la profundidad de la fisura	91
3.2.3.3	Estudio de la evolución de la fisura en los ensayos	92
3.2.3.4	Influencia de la orientación de la masa excéntrica	101
4	TÉCNICAS NUMÉRICAS	105
4.1	Modelo numérico del eje giratorio fisurado	107
4.1.1	Planteamiento del problema	107
4.1.2	Descripción del modelo numérico	108
4.1.2.1	Tipos de análisis	108
4.1.2.2	Contactos entre superficies	109
4.1.2.3	Cargas y condiciones de contorno	110
4.1.2.4	Características de la malla	112
4.1.3	Tipología de los resultados obtenidos del modelo	115
4.1.4	Validación del modelo numérico	117
4.2	Análisis y discusión de los resultados numéricos	122
4.2.1	Influencia de la profundidad de la fisura en velocidades críticas	123
4.2.2	Influencia de la orientación de la masa excéntrica	127
5	DETERMINACIÓN DEL FIT EN EJES FISURADOS GIRATORIOS	131
5.1	Consideraciones iniciales para el cálculo del FIT	133
5.2	Método de cálculo del FIT a partir de los desplazamientos	134
5.3	Análisis de los resultados del FIT	136
5.4	Análisis del FIT	137
5.4.1	Influencia de la profundidad de la fisura	137
5.4.2	Influencia de la orientación de la masa excéntrica	147
5.4.3	Comparación del FIT estático y FIT dinámico	150
6	CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS	153
6.1	Conclusiones	155
6.2	Desarrollos futuros	156
	BIBLIOGRAFÍA	159

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1	Modelo Rankine Rotor.	9
Figura 2.2	(a) <i>Forward whirling</i> , (b) <i>Backward whirling</i>	10
Figura 2.3	Respuesta dinámica de un rotor [3].	11
Figura 2.4	Modelo Jeffcott Rotor.	12
Figura 2.5	Órbitas según defecto de un rotor. Desequilibrio y eje fisurado a $\frac{1}{3}\omega_c$ [13].	16
Figura 2.6	Trasformada de una señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia (FFT) [19].	17
Figura 2.7	Ejemplo de espectro FFT para un eje con desequilibrio. . .	18
Figura 2.8	Ejemplo de espectro FFT para un eje con fisura.	19
Figura 2.9	Modelo de Jeffcott Rotor fisurado.	20
Figura 2.10	Sección de un eje fisurado.	21
Figura 2.11	Respuesta vibratoria de un eje fisurado [9].	22
Figura 2.12	Respuesta vibratoria de distintos rotores [31].	23
Figura 2.13	Influencia de la profundidad de fisura en la amplitud de la respuesta vibratoria de un rotor [31].	24
Figura 2.14	Función para el cálculo de la profundidad de fisura [33]. .	25
Figura 2.15	Resultados experimentales para la localización de la fisura [33].	25
Figura 2.16	Comparación de los resultados analíticos y experimentales para el armónico 3X [33].	26
Figura 2.17	Modelo del sistema rotor en 2D mediante el método de elementos finitos como una viga de Timoshenko [34]. . .	26
Figura 2.18	Comparación de los desplazamientos verticales y horizontales de un eje fisurado (—) y sin fisurar (- - -) [34]. . . .	27
Figura 2.19	Comparación de los resultados obtenidos en [37] con otros métodos de integración directa alrededor de $\frac{1}{3}\omega_c$	28
Figura 2.20	Medias de las amplitudes de las funciones IMFs de las componentes 1X y 2X en $\frac{1}{2}\omega_c$ (superior) y de 1X y 3X en $\frac{1}{3}\omega_c$ (inferior) [23].	29
Figura 2.21	Apertura y cierre de la fisura.	30

Figura 2.22	Modelos de apertura y cierre de la fisura. (a) Modelo de fisura abierta, (b) Modelo de fisura abierta o cerrada y (c) Modelo de apertura y cierre gradual de la fisura.	31
Figura 2.23	Modelos de apertura y cierre de la fisura. (a) Darpe et al. [7], (b) Bachschmid et al. [39] y (c) P. Rubio [40].	32
Figura 2.24	Órbitas en varias posiciones del eje para a) $\frac{1}{3}\omega_c$, b) $\frac{1}{2}\omega_c$ [34].	33
Figura 2.25	Órbitas debidas al desequilibrio de un rotor fisurado. <i>Forward whirl</i> y <i>backward whirl</i> [41].	34
Figura 2.26	Órbitas tipo <i>forward</i> y <i>backward</i> alrededor de $\frac{1}{2}\omega_c$, $\frac{1}{3}\omega_c$ y $\frac{1}{4}\omega_c$ [36].	35
Figura 2.27	Tipo de epitrocoides. (a) Epicicloide. (b) Epicicloide acortada. (c) Epicicloide alargada.	36
Figura 2.28	Órbitas según el tamaño de la fisura alrededor de $\frac{1}{2}\omega_c$ [34]. (.... $\alpha = 0.125$, -.- $\alpha = 0.25$, --- $\alpha = 0.375$, — $\alpha = 0.5$).	37
Figura 2.29	Órbitas alrededor de $\frac{1}{2}\omega_c$ para una profundidad de fisura de $\alpha = 0.15, 0.32$ y 0.5 [36], [23] y [34].	38
Figura 2.30	Cambio en la órbita según velocidad de giro [34].	39
Figura 2.31	Diversidad de resultados alrededor de $\frac{1}{2}\omega_c$. (a) [31], (b) [42], (c) [43], (d) [36], (e) [23], (f) [44].	40
Figura 2.32	Diversidad de resultados alrededor de $\frac{1}{3}\omega_c$. (a) [31], (b) [42], (c) [43], (d) [36], (e) [23], (f) [44].	40
Figura 2.33	Diversidad de resultados alrededor de $\frac{1}{4}\omega_c$. (a) [42], (b) [36], (c) [23], (d) [44].	41
Figura 2.34	Diferencias en los resultados teóricos y experimentales alrededor de $\frac{1}{2}\omega_c$ y $\frac{1}{3}\omega_c$ [42].	41
Figura 2.35	Resultados experimentales alrededor de $\frac{1}{2}\omega_c$ y $\frac{1}{3}\omega_c$ [23].	42
Figura 2.36	Resultados analíticos alrededor de $\frac{1}{2}\omega_c$ y $\frac{1}{3}\omega_c$ [23].	43
Figura 2.37	FFT para un eje fisurado a 100 Hz [45].	44
Figura 2.38	Resultados analíticos de la FFT para un eje fisurado (a) $\frac{1}{5}\omega_c$ (b) $\frac{1}{3}\omega_c$ y (c) $\frac{1}{2}\omega_c$ [7].	44
Figura 2.39	Resultados experimentales de la FFT para un eje fisurado (a) $\frac{1}{5}\omega_c$ (b) $\frac{1}{3}\omega_c$ y (c) $\frac{1}{2}\omega_c$ [7].	45
Figura 2.40	FFT para un eje fisurado (a) $\frac{1}{4}\omega_c$ (b) $\frac{1}{2}\omega_c$ [46].	46
Figura 2.41	FFT para un eje fisurado (a) $\frac{1}{4}\omega_c$ (b) $\frac{1}{3}\omega_c$ y $\frac{1}{2}\omega_c$ [44].	47
Figura 2.42	Modos básicos de fractura: a) Modo I, b) Modo II, c) Modo III.	49

Figura 2.43	FIT en el punto central (A) y en el extremo (B) del frente de fisura cuando el eje está sometido a flexión [51].	51
Figura 2.44	Ejemplo del FIT adimensional a lo largo de un giro del eje en un modelo cuasiestático [40].	52
Figura 2.45	Microestructura de la superficie fisurada (a) inicio y (b) final de la propagación de la fisura [57].	53
Figura 2.46	Relación entre la velocidad de propagación de la fisura de fatiga $\frac{da}{dN}$, y la variación del FIT ΔK	55
Figura 3.47	Banco de ensayos de ejes giratorios.	59
Figura 3.48	Disposición del eje en los ensayos experimentales.	60
Figura 3.49	Esquema de la disposición del disco y la masa excéntrica.	60
Figura 3.50	Esquema cadena medida utilizada en los ensayos experimentales.	61
Figura 3.51	Máquina de fisuración por resonancia.	64
Figura 3.52	Disposición del eje en la máquina de fisuración por resonancia.	65
Figura 3.53	Actuador eléctrico y acelerómetro.	65
Figura 3.54	Sensor de proximidad magnética.	66
Figura 3.55	Video-microscopio de medición 2D Swift Duo.	68
Figura 3.56	Detalle de la zona de la entalla de uno de los ejes ensayados	68
Figura 3.57	Disposición del eje.	69
Figura 3.58	Orientaciones de la masa excéntrica en relación con la entalla estudiadas experimentalmente.	70
Figura 3.59	Barrido de velocidades. Órbitas para el caso $\alpha = 0.375$ y $\theta = 0^\circ$	72
Figura 3.60	Barrido de velocidades. FFT para el caso $\alpha = 0.375$ y $\theta = 0^\circ$	73
Figura 3.61	Lazos interiores consecuencia del giro <i>forward</i> para $\alpha > 0.5$. $p = 0.3056$ y $p = 0.4533$	75
Figura 3.62	FFT $p=0.3503$ y $\theta = 0^\circ$. a) Sin fisura, b) Con fisura de $\alpha = 0.375$	76
Figura 3.63	Órbitas para $\alpha = 0.375$ y $\theta = 0^\circ$ en velocidades cercanas a $\frac{1}{2}\omega_c$	77
Figura 3.64	FFT para $\alpha = 0.375$ y $\theta = 0^\circ$ en velocidades cercanas a $\frac{1}{2}\omega_c$	78
Figura 3.65	FFT para un eje intacto y $\theta = 0^\circ$ en velocidades cercanas a $\frac{1}{3}\omega_c$	81
Figura 3.66	FFT para $\alpha = 0.350$ y $\theta = 0^\circ$ en velocidades cercanas a $\frac{1}{3}\omega_c$	82
Figura 3.67	FFT para $\alpha = 0.375$ y $\theta = 0^\circ$ en velocidades cercanas a $\frac{1}{3}\omega_c$	82

Figura 3.68	FFT para $\alpha = 0.545$ y $\theta = 0^\circ$ en velocidades cercanas a $\frac{1}{3}\omega_c$. 83
Figura 3.69	FFT para $\alpha = 0.550$ y $\theta = 0^\circ$ en velocidades cercanas a $\frac{1}{3}\omega_c$. 83
Figura 3.70	Órbitas en $\frac{1}{4}\omega_c$ casos: Sin fisura, $\alpha = 0.350, 0.375, 0.545$ y 0.550. 86
Figura 3.71	Órbitas en $\frac{1}{3}\omega_c$ casos: Sin fisura, $\alpha = 0.350, 0.375, 0.545$ y 0.550. 88
Figura 3.72	Órbitas en $\frac{1}{2}\omega_c$ casos: Sin fisura, $\alpha = 0.350, 0.375, 0.545$ y 0.550. 90
Figura 3.73	Propagación de la fisura. Órbitas en $\frac{1}{4}\omega_c$. Fisura inicial $\alpha_0 = 0.375$ 93
Figura 3.74	Propagación de la fisura. Órbitas en $\frac{1}{3}\omega_c$. Fisura inicial $\alpha_0 = 0.375$ 94
Figura 3.75	Propagación de la fisura. Órbitas en $\frac{1}{2}\omega_c$. Fisura inicial $\alpha_0 = 0.375$ 95
Figura 3.76	FFT para el instante inicial (1) en velocidades cercanas a $\frac{1}{3}\omega_c$ 96
Figura 3.77	FFT para el instante intermedio (2) en velocidades cercanas a $\frac{1}{3}\omega_c$ 97
Figura 3.78	FFT para el instante intermedio (3) en velocidades cercanas a $\frac{1}{3}\omega_c$ 97
Figura 3.79	FFT para el instante final (4) en velocidades cercanas a $\frac{1}{3}\omega_c$. 98
Figura 3.80	Frente de fisura una vez terminado el ensayo $\alpha = 0.375$ y $\theta = 0^\circ$ 101
Figura 3.81	Órbitas en $\frac{1}{2}\omega_c$ para $\alpha = 0.5$ y $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ y 90° 102
Figura 3.82	Frente de fisura $\alpha = 0.5$ y $\theta = 0^\circ$ 103
Figura 3.83	Frente de fisura $\alpha = 0.5$ y $\theta = 45^\circ$ 104
Figura 3.84	Frente de fisura $\alpha = 0.5$ y $\theta = 90^\circ$ 104
Figura 4.85	Profundidades de fisura (a) y orientaciones de la masa excéntrica analizadas en el modelo numérico (b). 108
Figura 4.86	Detalle de la zona intacta y la zona fisurada. 109
Figura 4.87	Detalle de la zona del eje donde se define la interacción eje-disco. 110
Figura 4.88	Modelo numérico dinámico tridimensional. 111
Figura 4.89	Interacción <i>coupling</i> en uno de los extremos del eje. 111
Figura 4.90	Análisis de sensibilidad de la malla. Variación del mallado longitudinal. 113

Figura 4.91	Análisis de sensibilidad de la malla. Variación del mallado transversal de la zona fisurada.	114
Figura 4.92	Análisis de sensibilidad de la malla. Variación del mallado transversal de la zona intacta.	115
Figura 4.93	Desplazamiento en la dirección x para el caso $\alpha = 0.5$, $\theta = 0^\circ$ y $p = 0.2651$	116
Figura 4.94	Desplazamiento en la dirección y para el caso $\alpha = 0.5$, $\theta = 0^\circ$ y $p = 0.2651$	116
Figura 4.95	Comparación de los resultados numéricos con los experimentales y con los numéricos en [37] para $p \approx 0.5$	118
Figura 4.96	Comparación de los resultados numéricos con los experimentales y con los numéricos en [37] para $p \approx 0.33$	119
Figura 4.97	Comparación de los resultados numéricos con los experimentales y con los numéricos en [37] para $p \approx 0.25$	120
Figura 4.98	Comparación de los resultados para $p = 0.7$. (a) Numérico. (b) Numérico en [37].	122
Figura 4.99	Generación de la órbita a partir de los desplazamientos.	123
Figura 4.100	Órbitas de una vuelta de la simulación numérica para $p = 0.2651$ y $\alpha = 0.25$ y $\alpha = 0.5$	124
Figura 4.101	Variación de la órbita en función de la velocidad de giro y el tamaño de la fisura.	125
Figura 4.102	Órbitas de una vuelta de la simulación numérica para $p = 0.3313$ y $\alpha = 0.25$ (izquierda) y 0.5 (derecha).	126
Figura 4.103	Órbitas de una vuelta de la simulación numérica para $p = 0.5181$ y $\alpha = 0.25$ (izquierda) y 0.5 (derecha).	127
Figura 4.104	Influencia de θ en las órbitas. (a) $\theta = 0^\circ$, (b) $\theta = 45^\circ$ y $\theta = 90^\circ$	128
Figura 5.105	Posiciones en el frente de fisura (γ) analizadas en el modelo numérico.	133
Figura 5.106	Detalle de los desplazamientos en la fisura.	134
Figura 5.107	Cálculo de $\frac{u_z}{\sqrt{r}}$ para $\gamma = 0$, $\phi = 315^\circ$, $\alpha = 0.25$, $\theta = 0^\circ$	135
Figura 5.108	Factor de Intensidad de Tensiones a lo largo de toda la simulación numérica para el caso $\alpha = 0.5$, $\theta = 0^\circ$ y $p = 0.2651$	136
Figura 5.109	Influencia profundidad de fisura. Órbita y FIT para $\alpha = 0.25$, $p = 0.2601$ y $\theta = 0^\circ$	138

Figura 5.110	Influencia profundidad de fisura. Órbita y FIT para $\alpha = 0.5$, $p = 0.2601$ y $\theta = 0^\circ$	139
Figura 5.111	Influencia profundidad de fisura. Órbita y FIT para $\alpha = 0.25$, $p = 0.3313$ y $\theta = 0^\circ$	141
Figura 5.112	Influencia profundidad de fisura. Órbita y FIT para $\alpha = 0.5$, $p = 0.3313$ y $\theta = 0^\circ$	142
Figura 5.113	Influencia profundidad de fisura. Órbita y FIT para $\alpha = 0.25$, $p = 0.5181$ y $\theta = 0^\circ$	143
Figura 5.114	Influencia profundidad de fisura. Órbita y FIT para $\alpha = 0.5$, $p = 0.5181$ y $\theta = 0^\circ$	144
Figura 5.115	Influencia profundidad de fisura. Órbita y FIT para $\alpha = 0.5$, $p = 0.7$ y $\theta = 0^\circ$	146
Figura 5.116	Influencia posición excentricidad. Órbita y FIT para $\alpha = 0.5$, $p = 0.5181$ y $\theta = 45^\circ$	148
Figura 5.117	Influencia posición excentricidad. Órbita y FIT para $\alpha = 0.5$, $p = 0.5181$ y $\theta = 90^\circ$	149
Figura 5.118	Comparación del FIT estático y dinámico $\alpha = 0.5$ y $\theta = 0^\circ$	151
Figura 5.119	Comparación del FIT cuasiestático y el dinámico a $p=0.7$ para $\alpha = 0.5$ y $\theta = 0^\circ$	152

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2.1	Características del espectro de frecuencias en algunos de los defectos más comunes en máquinas rotatorias.	18
Tabla 3.2	Características sensor <i>LS-LD50</i>	63
Tabla 3.3	Características sensor <i>DW-AS-509-M19-320</i>	66
Tabla 3.4	Características acelerómetro <i>4519-001</i>	67
Tabla 3.5	Cociente de amplitudes en el entorno de $\frac{1}{2}\omega_c$ para $\alpha = 0.375$ y $\theta = 0^\circ$	78
Tabla 3.6	Cociente de amplitudes en el entorno de $\frac{1}{2}\omega_c$ para $\alpha = 0.005$ de los resultados obtenidos en [64].	79
Tabla 3.7	Cálculo velocidad crítica para las distintas profundidades de fisura.	84
Tabla 3.8	$\frac{A_i}{A_n}$ según α	85
Tabla 3.9	Cálculo velocidad crítica para los distintos instantes durante el ensayo.	99
Tabla 3.10	$\frac{A_1}{A_n}$ propagación de la fisura caso $\alpha = 0.375$ $\theta = 0^\circ$	100
Tabla 3.11	Estimación de la profundidad de la fisura	101
Tabla 3.12	Velocidad crítica según θ	103

INTRODUCCIÓN

En este primer capítulo se realiza una introducción al presente trabajo a través de la motivación, los objetivos y el contenido de esta Tesis Doctoral.

1.1 MOTIVACIÓN

La mayoría de los fallos de las máquinas rotatorias en servicio, como rotores, compresores o turbinas, normalmente se producen por la presencia y propagación de fisuras de fatiga en sus componentes. Las fisuras afectan al funcionamiento adecuado de este tipo de máquinas, puesto que pueden provocar su rotura de forma catastrófica, elevando los costes de manera importante. Uno de los principales componentes de este tipo de máquinas son los ejes giratorios. Los ejes trabajan en rotación y están sometidos fundamentalmente a esfuerzos de flexión y torsión, que pueden provocar la propagación de las fisuras por fatiga. La correcta identificación de las fisuras y el desarrollo de métodos que permitan conocer la propagación de las mismas, son necesarios para la estimación de la vida de los ejes giratorios. Por lo tanto, se hace necesario un estudio del comportamiento de los ejes giratorios fisurados.

La aparición de fisuras de fatiga en estos elementos mecánicos provoca una disminución de su rigidez, afectando a su comportamiento estático y dinámico, produciéndose un incremento en los desplazamientos y una disminución en las frecuencias de vibración y, por lo tanto, de sus velocidades críticas.

Tanto los desplazamientos como las frecuencias de vibración se pueden tomar como indicadores de fallo. Las diferencias que existen entre las órbitas descritas por la sección de un eje sin defectos y un eje fisurado, sobre todo a ciertas velocidades de giro como la velocidad crítica, o sus múltiplos y submúltiplos, son estudiadas por diversos investigadores en el campo de la detección de daño. También la presencia de un desequilibrio adicional, como puede ser una masa excéntrica, así como la orientación de esta, puede generar cambios en el comportamiento estático y dinámico de un eje giratorio y, además, tener influencia en la forma del frente de fisura.

Para realizar el estudio de cómo varían estos indicadores se recurre tanto a ensayos experimentales como análisis numéricos. En todos ellos se suele hacer uso del modelo de Jeffcott Rotor o eje de Laval, debido a su simplicidad.

Otro aspecto importante en la dinámica de ejes fisurados es el estado de la fisura durante el giro del eje, ya que esta se abre y se cierra alternativamente dependiendo de si se encuentra sometida a esfuerzos de tracción o compresión. Este mecanismo se denomina "breathing", y a él se debe que el comportamiento

del eje sea no lineal.

El Factor de Intensidad de Tensiones (FIT) es un parámetro que caracteriza el estado tensional en el frente de una fisura. En el caso de un eje giratorio, en el que se produce el mecanismo de apertura y cierre, el valor del FIT varía a medida que este gira, siendo positivo en el caso en el que la fisura está abierta y sometida a esfuerzos de tracción, y siendo nulo cuando la fisura está cerrada. Cuando este alcanza un valor crítico, denominado Tenacidad de Fractura, se produce la propagación de la fisura.

Hasta ahora, la mayoría de los trabajos que se han realizado en cuanto al comportamiento dinámico de ejes fisurados, se basan en ensayos experimentales y en modelos teóricos o numéricos. Los ensayos experimentales suponen un gran coste en cuanto al material que se necesita para llevarlos a cabo, ya que en su mayoría son ensayos destructivos. Desarrollar un modelo dinámico 3D mediante el método de elementos finitos, como medio complementario a los ensayos experimentales, ayudaría a reducir el coste de los ensayos. Además, obtener el FIT de manera experimental es difícil, por lo que poderlo obtener de manera numérica sería de gran interés, ya que en conocimiento de la autora hasta ahora no se ha obtenido nunca en modelos numéricos dinámicos.

Por todo ello, se realiza esta Tesis Doctoral en el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Carlos III de Madrid, con la que se pretende avanzar en el conocimiento del comportamiento dinámico de ejes fisurados giratorios.

1.2 OBJETIVOS

El objetivo principal de esta Tesis Doctoral es estudiar el comportamiento de un eje giratorio fisurado mediante técnicas experimentales y numéricas, así como la determinación del FIT dinámico. Por tanto, se plantean como objetivos concretos:

- Obtener datos experimentales del comportamiento de un eje rotatorio con fisuras reales de fatiga mediante un banco de ensayos y estudiar la profundidad de fisura y de la orientación de la masa excéntrica como indicadores de la propagación de la fisura.

- Detectar la presencia de la fisura a través de las diferencias con respecto a un eje intacto mediante la visualización de las órbitas descritas por el eje y del espectro de frecuencias.
- Obtener la velocidad crítica por medio de la visualización de las órbitas descritas por el eje y del espectro de frecuencias.
- Desarrollar y validar un modelo numérico dinámico tridimensional para resolver la dinámica de un eje que contiene fisuras transversales de fatiga.
- Obtener el Factor de Intensidad de Tensiones en condiciones dinámicas de giro con el modelo numérico.

1.3 CONTENIDO

La presente Tesis Doctoral consta de cinco capítulos. El primero de ellos corresponde con esta Introducción, en la que se explican la motivación y los objetivos de esta Tesis.

En el segundo capítulo se hace un breve resumen de la dinámica de ejes y la dinámica de ejes fisurados, donde se definen algunos conceptos fundamentales como la velocidad crítica, el modelo de Jeffcott Rotor o las órbitas. También se presenta el problema de la presencia de defectos de un rotor y su diagnóstico y se explican las características de las órbitas y el espectro de frecuencias de un eje fisurado. Por otra parte se describen algunos de los conceptos más importantes de la Mecánica de la Fractura como el Factor de Intensidad de Tensiones (FIT) y se mencionan los métodos de cálculo del mismo.

En el tercer capítulo se describen los dispositivos experimentales, así como la metodología empleada durante la realización de los ensayos. Se analizan los resultados obtenidos (órbitas y espectro de frecuencias) pudiendo determinar la presencia de una fisura e identificarla a partir del cálculo de la velocidad crítica, para lo que se propone un procedimiento a partir de los cocientes de las amplitudes del espectro de frecuencias. Conocida la velocidad crítica del eje, se propone una metodología para la estimación de la fisura. Se estudia la profundidad de la fisura inicial, la evolución de esta en los ensayos y la influencia de la orientación de la masa excéntrica.

En el cuarto capítulo se describe el modelo numérico y, a partir de la similitud con los resultados experimentales y de la literatura, se valida. En este capítulo también se analizan y discuten los resultados numéricos de las órbitas obtenidos para diferentes velocidades de giro y profundidades de fisura.

En el quinto capítulo se determina el FIT en todo el frente de fisura a partir de los desplazamientos de las caras que constituyen la misma obtenidos de la solución del modelo numérico dinámico tridimensional desarrollado en el capítulo anterior. Una vez calculado el FIT se analiza la influencia de la profundidad de la fisura y la orientación de la masa excéntrica en el mismo. Además, se realiza una comparación entre el FIT obtenido del modelo en condiciones cuasiestáticas y habitualmente utilizado en los estudios de ejes fisurados y el FIT obtenido del modelo en condiciones dinámicas.

Las conclusiones, aportaciones y desarrollos futuros se exponen en el sexto capítulo.

ANTECEDENTES

En este segundo capítulo se hace un breve repaso por la historia de la dinámica de ejes, donde se resumen los conceptos más importantes que constituyen la base de la presente Tesis Doctoral, como la velocidad crítica, el modelo de Jeffcott Rotor o las órbitas. También se describen algunos de los defectos más comunes en las máquinas rotatorias, así como el diagnóstico de estos. Por otra parte, se analiza la dinámica de ejes fisurados, donde se explica el mecanismo de apertura y cierre de la fisura en ejes rotatorios fisurados, las características que presentan las órbitas que describen los ejes y cómo es el espectro de frecuencias. Por último, se describen algunos de los conceptos más importantes de la Mecánica de la Fractura, como el Factor de Intensidad de Tensiones (FIT) y su aplicación en la Ley de Paris para el estudio de la propagación de las fisuras.

2.1 DINÁMICA DE EJES

Se define como *máquina rotatoria* aquella que tiene uno o más componentes capaces de girar alrededor de un eje o un punto dado. Algunos ejemplos de máquinas rotatorias son turbinas, generadores, bombas centrífugas, compresores y motores.

Generalmente los elementos básicos de un rotor son ejes, cuyo diámetro puede variar a lo largo de su longitud, que tienen acoplados discos de varias formas y unos apoyos situados en varias posiciones. En la bibliografía, se habla de ejes o rotores indistintamente, refiriéndose al conjunto de los elementos mencionados anteriormente. A veces, también se utiliza el término *sistema rotor* para definir dicho conjunto.

La *dinámica de ejes* es una parte de la dinámica cuyo objetivo es el estudio del comportamiento de ejes rotatorios. Esta ha sido ampliamente investigada desde mediados del siglo XIX.

El primer análisis de un eje rotatorio fue realizado por Rankine en 1869 [1]. El modelo que propuso consiste en un sistema de dos grados de libertad que consta de una masa rígida (equivalente al eje) que gira en una órbita, con un resorte elástico que actúa en la dirección radial. En la figura 2.1, se muestra este modelo junto con los movimientos que puede describir el centro de la sección del eje durante el giro. G es el centro geométrico del eje y m es la masa.

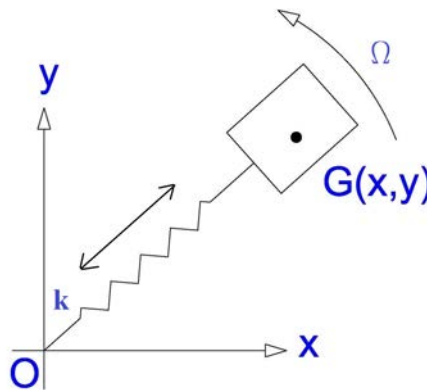


Figura 2.1: Modelo Rankine Rotor.

Rankine introdujo el término *whirling*, que se refiere al movimiento del centro geométrico de un rotor en un plano perpendicular a la línea que une los apoyos durante el giro del mismo. Este es un fenómeno común en la dinámica de ejes y es debido a varias causas como el desequilibrio, el amortiguamiento por histéresis, las fuerzas giroscópicas, la fricción de fluido en los cojinetes y la presencia de fisuras.

El *whirling* puede tener lugar en el mismo sentido de rotación del eje, *forward whirling*, o en sentido opuesto, *backward whirling* (ver figura 2.2). Y el módulo de la velocidad de *whirling*, v , puede coincidir o no con el módulo de la velocidad de giro, Ω (*whirling* *síncrono* o *asíncrono*).

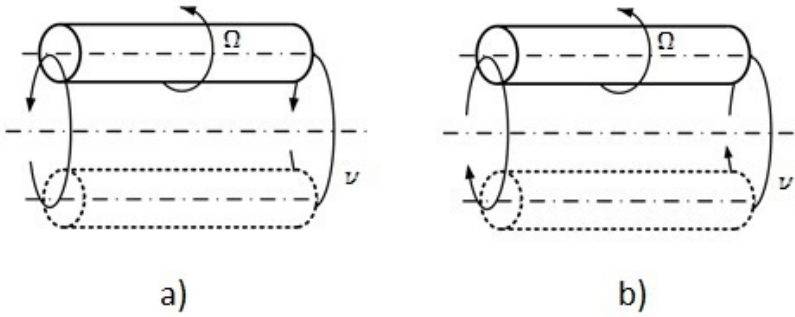


Figura 2.2: (a) *Forward whirling*, (b) *Backward whirling*.

En 1894, Dunkerley [2] fue el primero en usar el término de *velocidad crítica*. Esta se define como la velocidad, (ω_c) que coincide con la frecuencia natural del rotor (ω_n) , y viene determinada por la ecuación 2.1.

$$\omega_c = \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.1)$$

donde m es la masa y k la rigidez del sistema rotor.

Se denomina la relación de velocidades, p , al cociente entre la velocidad de giro y la velocidad crítica del rotor intacto. Se denominan *velocidades supercríticas* a aquellas cuyo valor es mayor que la velocidad crítica ($\Omega > \omega_c$) y *velocidades subcríticas* a aquellas velocidades que están por debajo de la crítica ($\Omega < \omega_c$).

En la figura 2.3 se puede ver un diagrama con la respuesta dinámica típica de un sistema rotor en función del factor del amortiguamiento ξ . Se representa la amplitud del desplazamiento frente a la velocidad de giro, ambas adimensionales. Se observa que la amplitud aumenta cuando la velocidad de giro es igual a la velocidad crítica $\Omega = \omega_c$. Dicho valor aumenta a medida que disminuye el valor del amortiguamiento. Además, una vez superada la velocidad crítica la amplitud alcanza un valor estacionario, e_u , correspondiente a la distancia entre el centro geométrico del sistema rotor y el centro de masas, y que representa el desequilibrio del rotor.

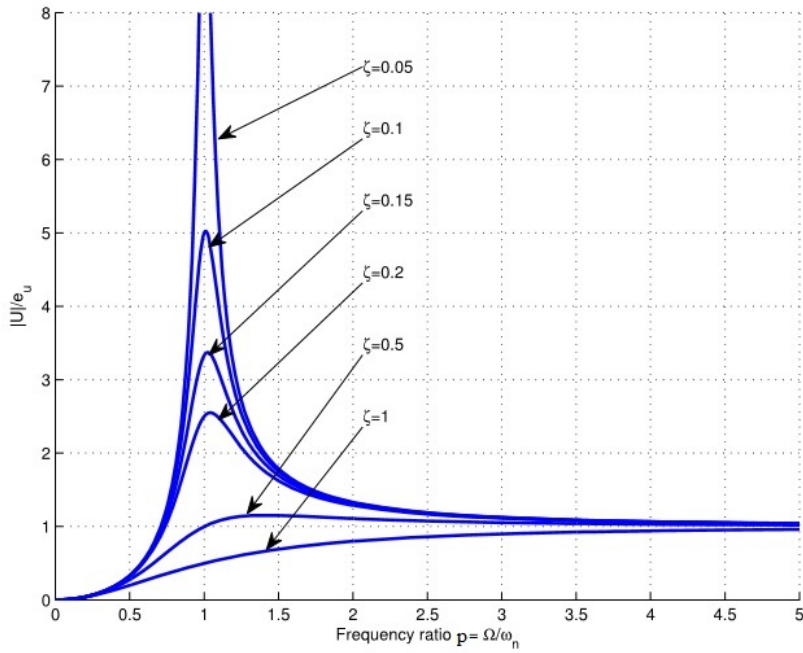


Figura 2.3: Respuesta dinámica de un rotor [3].

La primera teoría fundamental de la dinámica de ejes fue enunciada por Jeffcott [4] en 1919. En ella se propone el llamado *Modelo de Jeffcott Rotor*, también conocido como eje de Laval en honor a Carl De Laval. Este último contribuyó de manera significativa en las investigaciones de este campo [2] y [5]. El modelo de Jeffcott Rotor es uno de los modelos más utilizados en el estudio de la dinámica de ejes [6]-[11], ya que aunque es una simplificación de los rotores que existen en la realidad, conserva algunas características básicas que permiten una excelente comprensión de los fenómenos que se presentan en los ejes rotatorios.

Como se puede ver en la figura 2.4, este consiste en un eje de sección uniforme y masa despreciable, que tiene situado un disco en la mitad de su longitud y que se encuentra apoyado en sus dos extremos. El sistema rotor gira con una velocidad de giro constante, Ω . En esta figura se representa la posición del disco, donde C es el centro geométrico del disco, G el centro de masas, e_u la distancia entre el centro geométrico y el centro de masas, O el origen del sistema de referencia que coincide con la posición del centro geométrico del disco cuando el rotor se encuentra en reposo, m_e el desequilibrio y t , el tiempo.

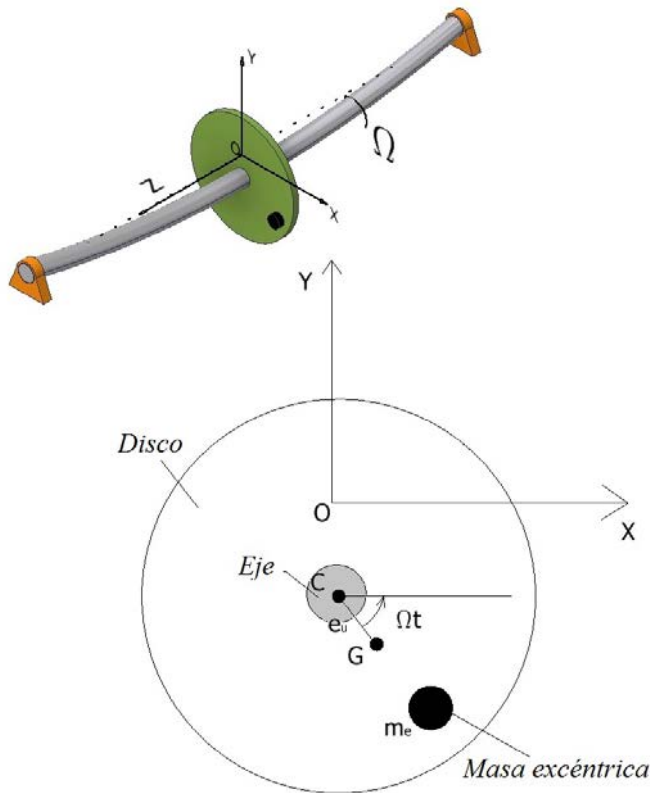


Figura 2.4: Modelo Jeffcott Rotor.

Actualmente, son muchos los investigadores que se centran en estudiar el comportamiento dinámico de los rotores, ya que estos elementos están presentes en la mayoría de las máquinas, cabe destacar autores como Lalanne y Ferraris [12], Ehrich [13], Muszynska [14] e Ishida y Yamamoto [15], por representar la base de estudio para el desarrollo de esta Tesis Doctoral.

Para estudiar el comportamiento de ejes rotatorios, se parte del modelo de Jeffcott Rotor visto en la figura 2.4, es decir, aquel en el que el peso del eje se considera despreciable y la única fuerza de excitación que actúa es la correspondiente al desequilibrio. También se considera despreciable la rigidez de los apoyos en comparación con la rigidez del eje.

Teniendo en cuenta todo esto, el movimiento para un sistema rotor completo, se define:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = me_u\Omega^2 \cos(\Omega t) \quad (2.2)$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = me_u\Omega^2 \sin(\Omega t) \quad (2.3)$$

donde m es la masa del disco, c el coeficiente de amortiguamiento, k la rigidez del sistema y x e y los desplazamientos en las direcciones x e y de acuerdo con el esquema mostrado en la figura 2.4.

2.1.1 Órbitas

Una órbita es la trayectoria que describe cualquier punto del eje, en el plano perpendicular a la línea que une los apoyos, cuando el rotor está girando. Es decir, la órbita es la representación del fenómeno conocido como *whirling* descrito anteriormente.

Las órbitas son el resultado de la representación del desplazamiento de dos movimientos en las direcciones x e y , los cuales son a su vez suma de uno o varios movimientos armónicos [16]. Por tanto, para una sección cualquier del eje los desplazamientos en las direcciones x e y son [16]:

$$x = A_{nx} \sum_{i=1}^n \frac{A_{ix}}{A_{nx}} \cos(i\Omega t + \psi_{ix}) \quad (2.4)$$

$$y = A_{ny} \sum_{i=1}^n \frac{A_{iy}}{A_{ny}} \cos(i\Omega t + \psi_{iy} - 90^\circ) \quad (2.5)$$

donde A_{ix} y A_{iy} , ψ_x y ψ_y son las amplitudes y los ángulos de fase en las direcciones x e y respectivamente, Ω la velocidad de giro e i es el número del

armónico correspondiente.

Así por ejemplo, en el caso de que el eje gire a una velocidad $\Omega = \frac{1}{2}\omega_c$, los desplazamientos en las direcciones x e y estarán compuestos por la suma de dos movimientos armónicos, uno correspondiente a la velocidad de giro (subíndice 1) y otro correspondiente a la velocidad crítica (subíndice 2). En este caso los desplazamientos se podrían escribir de la siguiente manera:

$$x = A_{2x}[\cos(\Omega t + \psi_1) + \frac{A_{1x}}{A_{2x}} \cos(2\Omega t + \psi_2)] \quad (2.6)$$

$$y = A_{2y}[\cos(\Omega t + \psi_1 - 90^\circ) + \frac{A_{1y}}{A_{2y}} \cos(2\Omega t + \psi_2 - 90^\circ)] \quad (2.7)$$

2.1.2 Defectos en un rotor

En este apartado se citan algunos de los defectos más comunes que se dan en las máquinas rotatorias.

- Desequilibrio.
- Fisuras.
- Desalineamiento.
- Defecto de rodamientos.
- Eje curvado de forma permanente.
- Desajuste mecánico.
- Inestabilidad térmica.
- Holgura.

A continuación se explican con más detalle los defectos que están relacionados con esta Tesis.

El *desequilibrio* de un rotor es probablemente el defecto más común en las máquinas rotatorias y ocurre cuando el centro geométrico y el centro de masas de un rotor no coinciden. Este tipo de defecto se debe a la distribución desigual del peso del rotor alrededor de su centro geométrico y puede ser consecuencia de una fabricación imperfecta, que incluye el uso de materiales con densidad no

uniforme, imperfecciones de mecanizado o incluso errores de montaje. El modelo de Jeffcott Rotor representado en la figura 2.4 muestra un ejemplo de este tipo de defecto (m_e). El desequilibrio genera una fuerza de excitación cuya frecuencia coincide con la frecuencia de giro del rotor [14], [17].

La fisura es un defecto superficial en un rotor que puede provocar la rotura catastrófica debido a la propagación por fatiga de la misma. La aparición de fisuras de fatiga en ejes giratorios provoca una disminución de su rigidez, afectando a su comportamiento dinámico, produciéndose un incremento en los desplazamientos y una disminución en las frecuencias de vibración. Dado que los rotores están sometidos a cargas cíclicas, este defecto puede reducir su vida útil y por ello es el objeto de estudio de la presente Tesis.

2.1.3 *Diagnóstico de defectos en rotores*

En la mayoría de los casos las máquinas están sometidas a un mantenimiento preventivo que consiste en realizar revisiones periódicas para detectar si se ha producido algún defecto durante el funcionamiento. A medida que avanzan las investigaciones y con ayuda de la tecnología se tiende a realizar un mantenimiento predictivo, que consiste en pronosticar el fallo mediante el conocimiento del comportamiento de la máquina real y de cómo debería comportarse de forma ideal, conociendo así previamente qué elemento puede fallar y cuándo. Por ejemplo, en el caso de ejes fisurados, con el objetivo de predecir un accidente catastrófico por la rotura a fatiga, es necesario detectar las fisuras antes de que esto ocurra.

Es muy importante conocer qué parámetros son indicadores de fallo para así poder desarrollar técnicas de inspección no destructiva para su correcta detección. Algunas de las técnicas de diagnóstico más utilizadas en máquinas rotatorias se basan en:

- Análisis de los desplazamientos en el dominio del tiempo.
- Análisis de las órbitas.
- Análisis de las frecuencias.
- Transformada Wavelet de los desplazamientos.

Por ser las utilizadas en esta Tesis Doctoral, a continuación se detallan algunos aspectos de las órbitas y del espectro de frecuencias.

Las órbitas son utilizadas por numerosos autores como método de detección de fallos en rotores, debido al cambio que presentan en su tamaño y forma a determinadas velocidades múltiplos y submúltiplos de la velocidad crítica. Estas pueden dar información acerca de la presencia y propagación de fisuras, desalineamientos, desequilibrios, etc. En la figura 2.5, se muestran algunos ejemplos de órbitas según el defecto de un rotor.

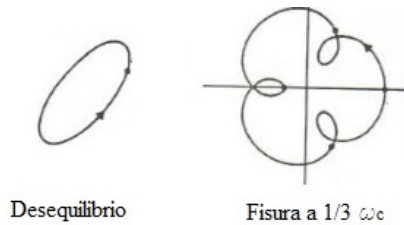


Figura 2.5: Órbitas según defecto de un rotor. Desequilibrio y eje fisurado a $\frac{1}{3}\omega_c$ [13].

Aunque es útil, un análisis exclusivo de las órbitas es insuficiente, debido a que no se puede extraer toda la información necesaria acerca de los posibles fallos existentes, por lo que se suele acompañar de un análisis del espectro de frecuencias de la señal [18].

Las señales obtenidas del comportamiento del eje son demasiado complejas y difíciles de interpretar, lo que hace necesario el uso de herramientas que transformen los datos obtenidos en el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia. Una de las herramientas más utilizadas es la Transformada Rápida de Fourier (FFT) (ver figura 2.6). Esta herramienta permite descomponer una señal periódica en la suma de diferentes señales simples (armónicos) cada una de ellas asociada con una frecuencia propia. De esta forma es posible conocer la composición en frecuencia de dicha señal periódica. En la figura 2.6 se puede ver como la señal periódica $f(t)$ se puede descomponer en la suma de dos señales simples $f_1(t)$ y $f_2(t)$. Estas dos señales tienen asociadas las frecuencias ω_1 y ω_2 respectivamente que son visibles en el espectro de frecuencias al transformar los datos de la señal $f(t)$ del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia.

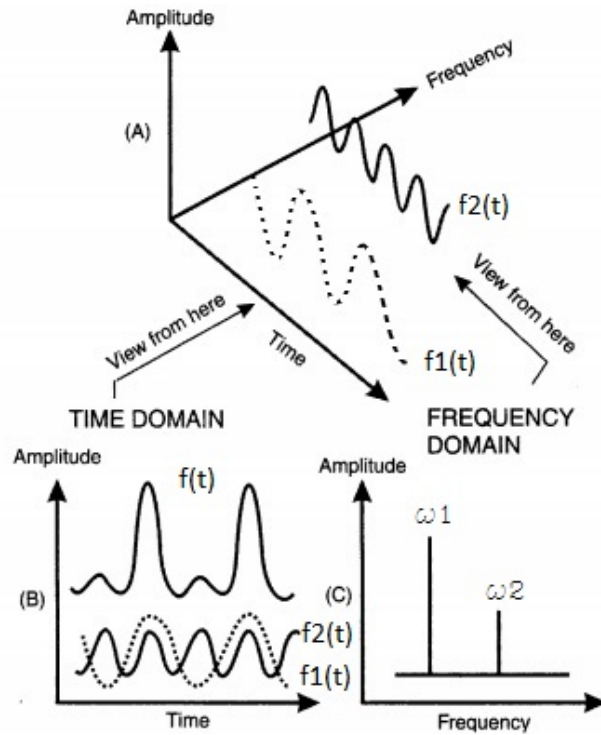


Figura 2.6: Transformada de una señal del dominio del tiempo al dominio de la frecuencia (FFT) [19].

El análisis de las señales mediante la FFT en el caso de ejes con defectos es una forma rápida y efectiva de ver las diferencias que existen entre el comportamiento de un eje sin ningún tipo de fallo y un eje que presente algún defecto. La aparición de ciertas frecuencias en el espectro y sus amplitudes relativas pueden indicar el tipo de defecto que presentan los ejes (ver tabla 2.1 y explicación posterior), por lo que se utiliza la FFT como técnica de diagnóstico en los rotores.

Tabla 2.1: Características del espectro de frecuencias en algunos de los defectos más comunes en máquinas rotatorias.

Defecto	Armónicos	Características del espectro
Desequilibrio	1X	Amplitud de 1X predominante
Fisuras	1X, 2X	Amplitud de 1X predominante
Desalineamiento	1X, 2X, etc	Amplitud de 1X con valores iguales o superiores de 2X y 3X
Inestabilidad térmica	1X	1X varía amplitud y fase
Holgura	1X y un gran número de componentes	Amplitud de 1X predominante

En el caso en el que exista un desequilibrio en el sistema rotor, en el espectro de frecuencias existe una frecuencia correspondiente a la velocidad de giro, a la que se denomina habitualmente 1X como se muestra en la figura 2.7 [13], [20], [21].

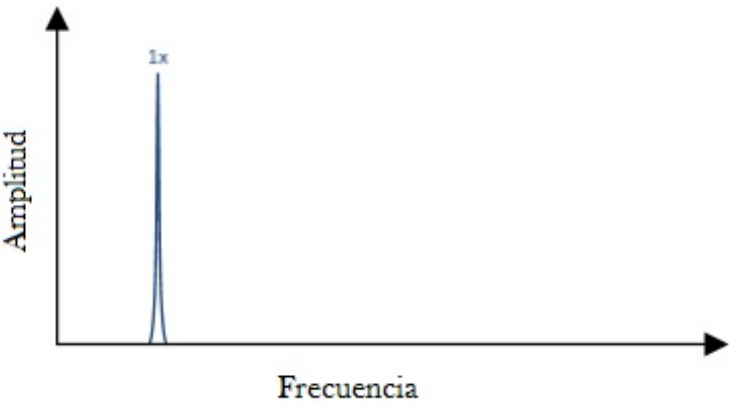


Figura 2.7: Ejemplo de espectro FFT para un eje con desequilibrio.

Dado que el desequilibrio está presente generalmente en todas las máquinas rotatorias, y que la frecuencia de excitación es la velocidad de giro, se denominan 1X a los armónicos relacionados con el desequilibrio. De esta forma, la frecuencia de la vibración es proporcional a la velocidad de giro.

Si además el sistema presenta una fisura la característica del espectro de frecuencias de este tipo de defecto es la presencia de las componentes de vibración $1X$ y $2X$ en cualquier velocidad de giro, correspondientes a la velocidad de giro y a dos veces la velocidad de giro respectivamente, como se ilustra en la figura 2.8 [13], [22].

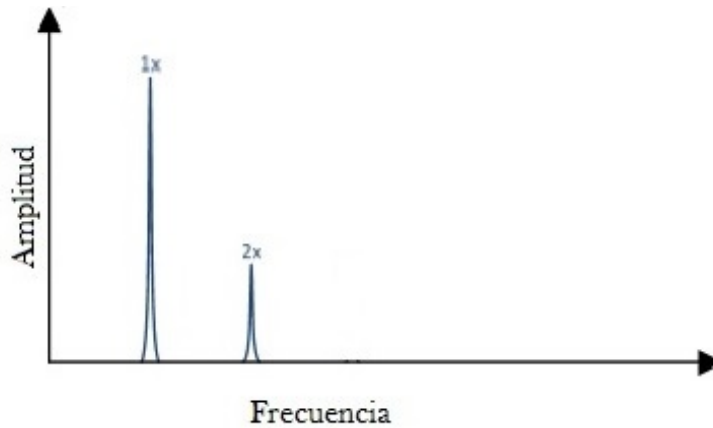


Figura 2.8: Ejemplo de espectro FFT para un eje con fisura.

En el caso de que la velocidad de giro sea próxima a la velocidad crítica se producen incrementos en las amplitudes de los desplazamientos cuyo análisis permite establecer la causa de fallo. En presencia de fisuras son de especial interés aquellas velocidades de giro subcríticas: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{4}$, generalizando $\frac{1}{n}\omega_c$. El número de armónicos asociados a dichas velocidades siempre será n , donde la componente correspondiente a la velocidad de giro será la denominada $1X$ y la componente correspondiente a la velocidad crítica será nX [13] y [14].

Aunque hoy en día, en defectos como las fisuras, todavía no se ha llegado a un consenso en cuanto a qué armónico se debe analizar [22], hay que destacar la importancia del análisis de estos armónicos, ya que pueden dar gran información sobre el estado en el que se encuentran los rotores y la rápida identificación del tipo de fallos hará que las máquinas rotatorias sean más fiables y duraderas.

2.2 DINÁMICA DE EJES FISURADOS

Para estudiar el comportamiento dinámico de un eje fisurado tradicionalmente se hace uso del modelo de Jeffcott Rotor fisurado (ver figura 2.9).

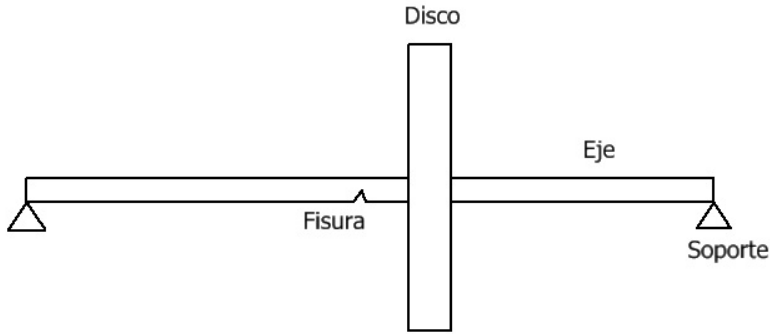


Figura 2.9: Modelo de Jeffcott Rotor fisurado.

Al igual que el modelo de Jeffcott Rotor sin fisura descrito en el apartado 2.1, este modelo cuenta con un eje de sección uniforme y masa despreciable, que tiene situado un disco en la mitad de su longitud, se encuentra apoyado en sus dos extremos y gira con una velocidad de giro constante, Ω . En este caso, además, el eje presenta una fisura.

La presencia de fisuras hace que la rigidez del rotor sea anisótropa, es decir, la rigidez depende de la dirección x e y .

Teniendo en cuenta el sistema de coordenadas presentado en la figura 2.10, para la sección de un eje fisurado, las ecuaciones de movimiento de un eje rotatorio fisurado se definen [23]:

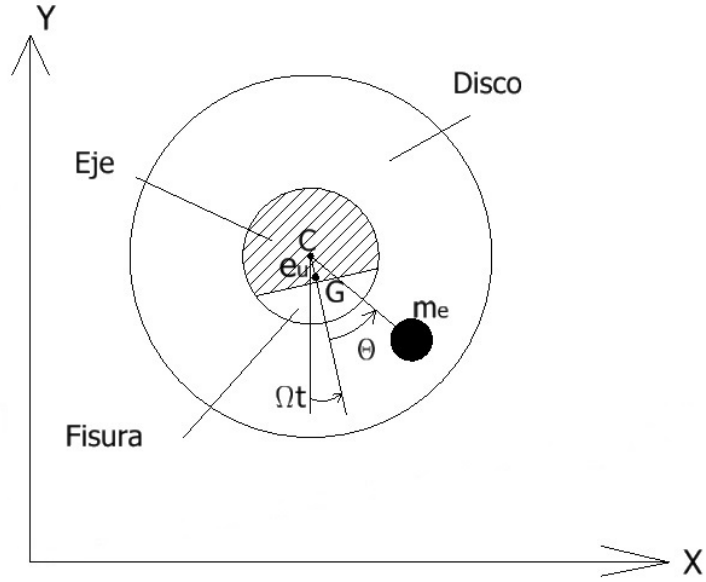


Figura 2.10: Sección de un eje fisurado.

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k_x x + k_{xy} y = m e_u \Omega^2 \sin(\Omega t + \theta) \quad (2.8)$$

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + k_{yx} x + k_y y = m e_u \Omega^2 \cos(\Omega t + \theta) - mg \quad (2.9)$$

Donde m y c , son la masa del disco y el amortiguamiento, e_u la distancia entre el centro geométrico y el centro de masas, θ el ángulo entre el desequilibrio y la dirección perpendicular al frente de la fisura, Ω la velocidad de giro, g la aceleración de la gravedad, y k_x , k_{xy} , k_{yx} y k_y los términos que componen la matriz rigidez K .

Los ejes rotatorios fisurados han sido objeto de estudio desde mediados del siglo XX. Algunos de los autores que destacan en este ámbito son Bachschmid [24], Papadopoulos et al. [9], [25], [26], Sinou [27], [28].

Se han realizado numerosos estudios sobre el comportamiento de ejes rotatorios fisurados. Algunos de ellos se comentan a continuación debido a que sus resultados han sido de gran utilidad a la hora de elaborar esta Tesis y profundizar más en el campo de la detección de fisuras de ejes rotatorios.

Las fisuras aparecen como consecuencia de defectos y crecen debido a los esfuerzos a los que están sometidos dichos componentes y a las condiciones en las que trabajan, y van a afectar tanto a su comportamiento estático como dinámico, ya que se produce una disminución de la rigidez. Esto se traduce en la disminución de las frecuencias de vibración y en un incremento de los desplazamientos.

Existen numerosos estudios que se centran en el análisis del comportamiento dinámico y la propagación de fisuras de un eje rotatorio fisurado. Para ello, en casi todos ellos se realiza un análisis de los cambios que se producen en dicho comportamiento respecto a un eje intacto. Muchos de estos estudios se encuentran resumidos en las revisiones bibliográficas de Wauer [29], Gasch [8], Dimarogonas [30] y Papadopoulos [10].

Papadopoulos et al. en [9] obtienen la flexibilidad local de una sección fisurada de un eje cilíndrico de forma analítica y experimental y estudian las vibraciones de flexión en un Jeffcott Rotor fisurado. Concluyen que los resultados obtenidos en zonas cercanas a $\frac{1}{2}\omega_c$ sirven como indicador de la presencia de una fisura ya que, como se muestra en la figura 2.11, existen diferencias entre las amplitudes de un eje intacto (línea -.-) y uno fisurado (línea —). En el intacto se produce un aumento de la amplitud únicamente en la frecuencia correspondiente a la velocidad crítica, mientras que en el caso del eje fisurado, el aumento se produce en la velocidad crítica de este y en $\frac{1}{2}$ de esta. Además, se observa como la frecuencia crítica del eje fisurado es menor que la del eje intacto ($\omega_1 < \omega_n$).

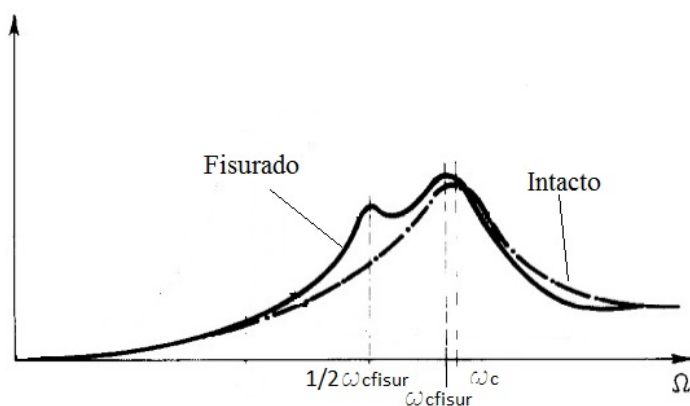


Figura 2.11: Respuesta vibratoria de un eje fisurado [9].

Chan y Lai [31] estudian el comportamiento dinámico de un eje fisurado a la velocidad crítica, a $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ de esta, mediante la resolución numérica de las ecua-

ciones del movimiento. Estos autores analizan la influencia de la profundidad de la fisura, el amortiguamiento y la orientación de una masa excéntrica en la amplitud de la respuesta vibratoria, y comparan la forma de las órbitas a $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$ de la velocidad crítica de un rotor fisurado.

En primer lugar, concluyen que el comportamiento de un rotor fisurado y otro sin fisura, es similar alrededor de $\frac{1}{2}\omega_c$. Sin embargo, difiere en $\frac{1}{3}\omega_c$ del eje, donde el eje entra en resonancia únicamente si presenta una fisura como se puede ver en la figura 2.12.

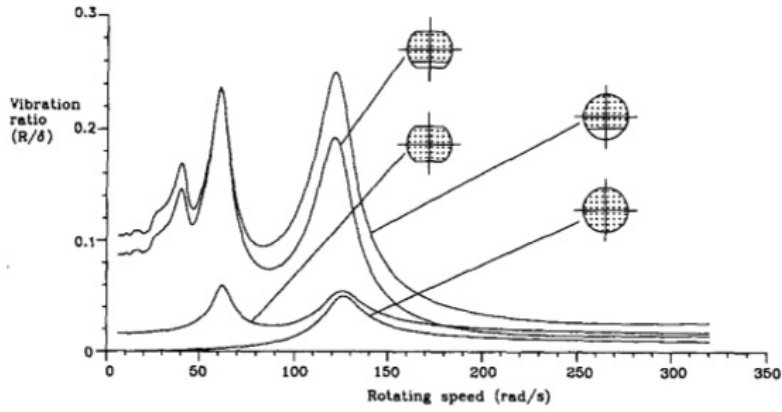


Figura 2.12: Respuesta vibratoria de distintos rotores [31].

En cuanto a la profundidad de la fisura, observan que, según aumenta, se produce una disminución de la frecuencia natural del rotor y un incremento en la amplitud de las frecuencias correspondientes a $\frac{1}{2}\omega_c$, $\frac{1}{3}\omega_c$ y ω_c (ver figura 2.13). Por otro lado, concluyen que el amortiguamiento y la orientación de la excentricidad también influyen en la amplitud. Sin embargo, estos autores consideran que los resultados de las amplitudes correspondientes a la velocidad crítica no son de utilidad para la monitorización de la respuesta vibratoria y únicamente se centran en el incremento de la amplitud en $\frac{1}{3}\omega_c$ como indicador de la presencia de una fisura.

Salawu [32] realiza una revisión de los métodos propuestos hasta ese momento para detectar fisuras y la posición de estas en el rotor, a través de la variación de las frecuencias naturales. En este trabajo se concluye que la variación de las frecuencias naturales no puede utilizarse por sí sola como un indicador de que existe una fisura en un punto determinado ya que fisuras con tamaños similares

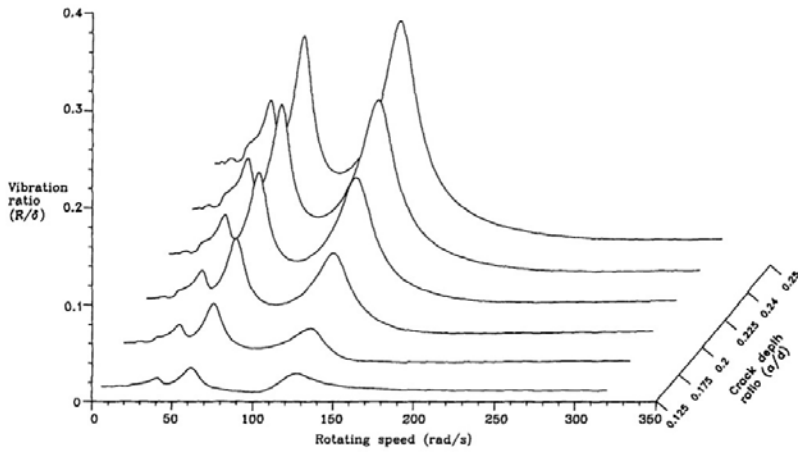


Figura 2.13: Influencia de la profundidad de fisura en la amplitud de la respuesta vibratoria de un rotor [31].

pueden presentar la misma variación estando en posiciones distintas.

Bachschnid et al. en [33] presentan un método de identificación de la fisura a partir del análisis de la señal en el dominio de la frecuencia en un sistema rotor. Para ello realizan un modelo numérico del rotor en 2D mediante el Método de Elementos Finitos. Estos autores proponen una función para el cálculo de la profundidad de la fisura ($f(p) \cdot g(p)$). En la figura 2.14 se representa dicha función para los nX armónicos de $\frac{1}{n} \omega_c$, es decir, $3X$ para $\frac{1}{3} \omega_c$, $2X$ para $\frac{1}{2} \omega_c$ y $1X$ para ω_c .

En la figura 2.15 se representa un esquema del sistema rotor, en la parte superior se indica la posición de la fisura cuyo tamaño es del 47 % y en la parte inferior se muestran los resultados obtenidos experimentalmente para $3X$ en $\frac{1}{3} \omega_c$, $2X$ en $\frac{1}{2} \omega_c$ y $1X$ en ω_c . Comparando los resultados de la figura 2.14 para un tamaño de la fisura del 47 % con los obtenidos en la figura 2.15 se puede ver que la fisura se encuentra entre el elemento 23 y 24 como se indica en la misma, ya que esa es la posición en la que los resultados de la función son similares. Dada la similitud de los resultados analíticos y experimentales como se puede ver en la figura 2.16 estos autores validan su modelo.

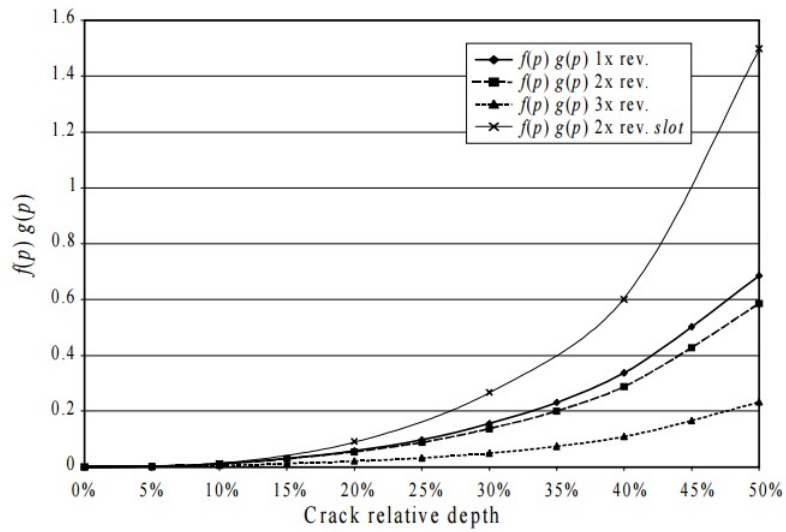


Figura 2.14: Función para el cálculo de la profundidad de fisura [33].

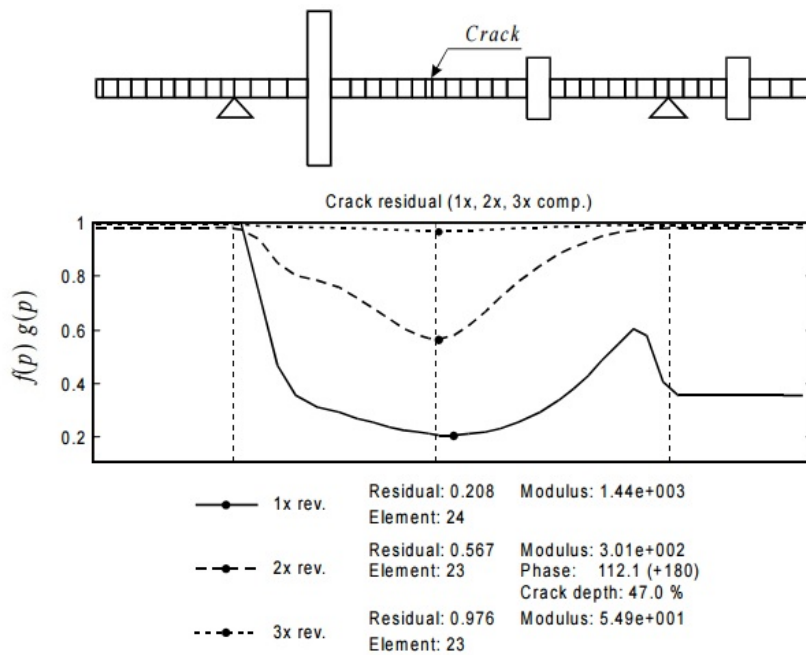


Figura 2.15: Resultados experimentales para la localización de la fisura [33].

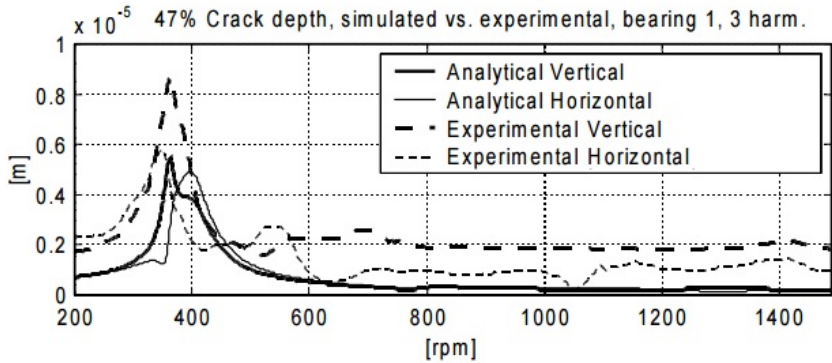


Figura 2.16: Comparación de los resultados analíticos y experimentales para el armónico 3X [33].

Sinou y Lees en [34] y Sinou en [27] analizan teóricamente la influencia de la presencia de una fisura y el tamaño de esta en las frecuencias naturales y las órbitas descritas por el rotor. Para ello, modelan el sistema rotor en 2D mediante el método de elementos finitos como una viga de Timoshenko (ver figura 2.17).

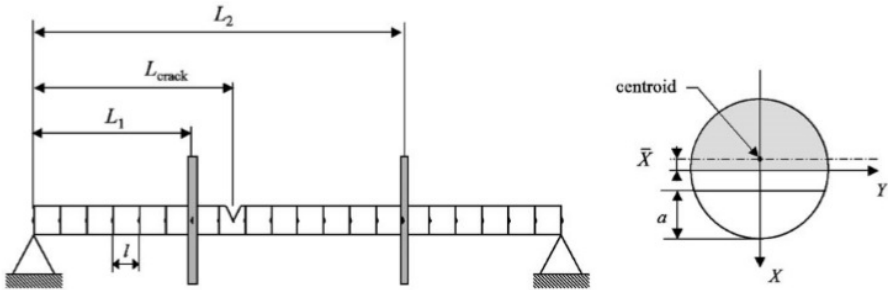


Figura 2.17: Modelo del sistema rotor en 2D mediante el método de elementos finitos como una viga de Timoshenko [34].

Estos autores concluyen que las diferencias en los desplazamientos debidas a la presencia de una fisura son mayores y, por tanto, más fáciles de detectar en los desplazamientos verticales. Observan que la presencia de una fisura provoca la aparición de tres armónicos en la señal obtenida de la simulación del movimiento. En la figura 2.18 se muestran los resultados obtenidos de los desplazamientos verticales (parte superior) y horizontales (parte inferior) en función de la velocidad de giro para un eje con y sin fisura. Por otra parte, analizan únicamente la influencia de la profundidad de fisura en las órbitas en $\frac{1}{2}\omega_c$.

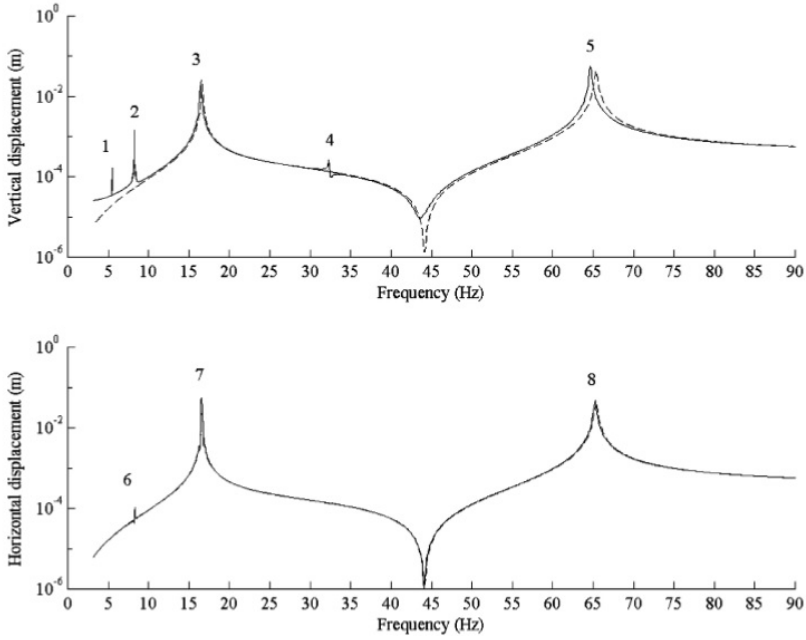


Figura 2.18: Comparación de los desplazamientos verticales y horizontales de un eje fisurado (—) y sin fisurar (- - -) [34].

Sinou en [28] también realiza un análisis del comportamiento dinámico de forma experimental de un eje sin fisura y otro con una fisura con comportamiento de fisura siempre abierta. Analiza las amplitudes y las órbitas centrándose en este último análisis únicamente en $\frac{1}{2}\omega_c$. En este trabajo se concluye que es necesario realizar una comparación con los resultados de un eje intacto, ya que el comportamiento a $\frac{1}{2}\omega_c$ puede ser similar para ejes que presenten otro tipo de defectos, como por ejemplo asimetría. Aún así, se concluye que la presencia de fisuras puede ser detectada únicamente con el análisis de $\frac{1}{2}\omega_c$, a pesar de que la presencia de este tipo de defecto produce el incremento de la amplitud de más armónicos.

Al-Shudeifat et al. en [35] y [36] realizan un análisis del comportamiento dinámico de un eje fisurado teóricamente mediante un modelo 2D realizado con el método de elementos finitos y experimentalmente. Desarrollan un modelo teóricamente y lo validan dada la similitud de los resultados con los experimentales en $\frac{1}{2}\omega_c$. Con este modelo analizan las velocidades críticas y los submúltiplos de estas según la profundidad de la fisura a partir del incremento que se produce en la amplitud de la respuesta vibratoria. Por último, concluyen que las órbitas descritas por el sistema rotor son sensibles a los cambios de la orientación de la

masa excéntrica y a los cambios de posición de la fisura.

Rubio y Fernández-Sáez en [37] proponen una metodología para la resolución de las ecuaciones del movimiento del Jeffcott Rotor fisurado alcanzándose el mismo comportamiento en el espectro de frecuencias y en las órbitas que otros autores (ver figura 2.19).

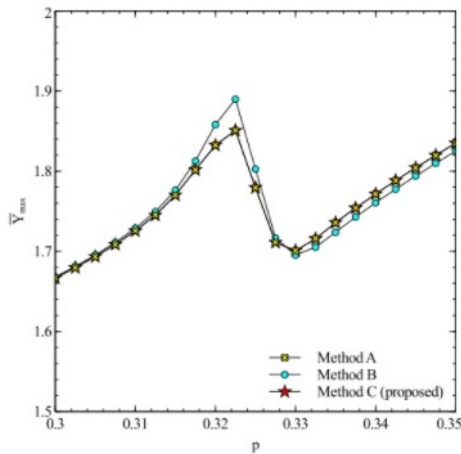


Figura 2.19: Comparación de los resultados obtenidos en [37] con otros métodos de integración directa alrededor de $\frac{1}{3}\omega_c$.

Guo et al., por su parte, en [23] resuelven el modelo 2D desarrollado mediante el método de elementos finitos en [36] y lo validan con los resultados experimentales obtenidos. Analizan las órbitas en $\frac{1}{2}\omega_c$ y $\frac{1}{3}\omega_c$ y las amplitudes mediante el análisis de la Descomposición en Modo Empírico (Empirical Mode Decomposition EMD). Este método consiste en descomponer las señales de vibración originales en sub-señales de altas a bajas frecuencias, denominadas Funciones de Modo Intrínseco (IMFs). En la figura 2.20 se muestran las medias de las amplitudes de las funciones IMFs correspondientes a las frecuencias cercanas a $\frac{1}{2}\omega_c$ y $\frac{1}{3}\omega_c$. En este trabajo se obtiene que las amplitudes de las componentes 2X y 3X aumentan según la velocidad de giro se acerque a $\frac{1}{2}\omega_c$ y $\frac{1}{3}\omega_c$ y que la amplitud de la componente 1X no sigue una tendencia clara. Por tanto, se concluye que el análisis de la EMD en las componentes 2X y 3X para velocidades de giro cercanas a $\frac{1}{2}\omega_c$ y $\frac{1}{3}\omega_c$ respectivamente sirve como método de detección de la fisura.

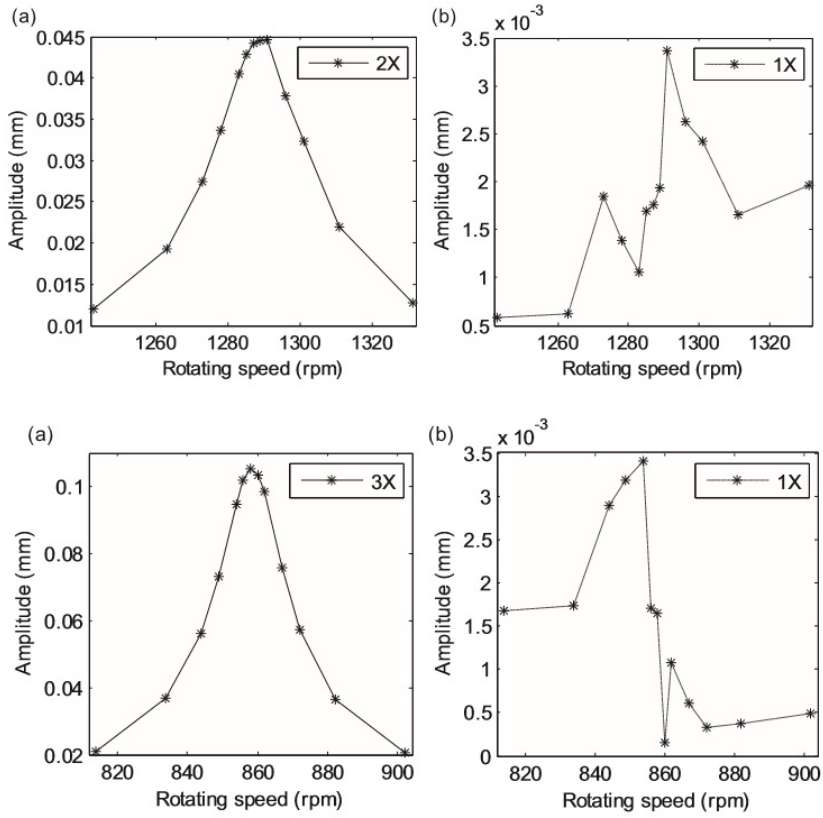


Figura 2.20: Medias de las amplitudes de las funciones IMFs de las componentes 1X y 2X en $\frac{1}{2}\omega_c$ (superior) y de 1X y 3X en $\frac{1}{3}\omega_c$ (inferior) [23].

2.2.1 Comportamiento de apertura y cierre de la fisura en ejes rotatorios

Otro aspecto a tener en cuenta a la hora de estudiar la dinámica de ejes fisurados es el estado de apertura y cierre de la fisura durante el giro del eje. Algunos autores utilizan hipótesis poco realistas desde el punto de vista de las fisuras de fatiga en ejes giratorios de que la fisura siempre se encuentra abierta [25], [26]. Por el contrario, se considera que la fisura se abre o se cierra dependiendo de si se encuentra sometida a esfuerzos de tracción o compresión, como se puede ver esquemáticamente en la figura 2.21.

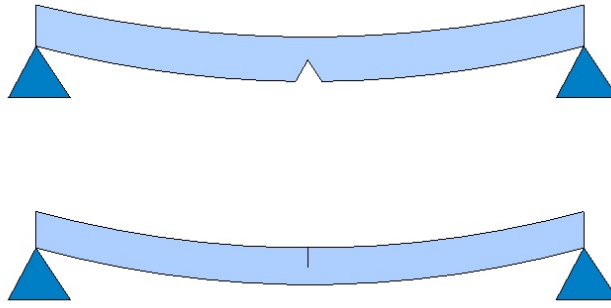


Figura 2.21: Apertura y cierre de la fisura.

El comportamiento del eje fisurado se puede modelar teniendo en cuenta la variación de la flexibilidad local durante el giro $g(\phi)$, siendo ϕ el ángulo de giro. Existen diversos modelos para definir el comportamiento de apertura y cierre de la fisura. Algunos de los más simples son los mostrados en la figura 2.22 y que se describen a continuación:

- *Modelos de fisura abierta:* se considera que la fisura siempre se encuentra en estado abierto, por lo que la función de flexibilidad toma la forma $g(\phi) = 1$ [25], [26] (ver figura 2.22 a).
- *Modelos de fisura abierta o cerrada (switching crack):* en estos modelos se considera que la fisura se encuentra completamente abierta o completamente cerrada sin tener en cuenta los estados parciales de apertura y cierre [8]. Por tanto, la función $g(\phi)$ toma valores 0 o 1 según esté cerrada o abierta respectivamente produciéndose una transición brusca desde la flexibilidad máxima a la mínima (ver figura 2.22 b).
- *Modelos de apertura y cierre gradual de la fisura (breathing crack):* estos modelos consideran que la cantidad de parte abierta de la fisura varía durante la rotación del eje de forma gradual, y por tanto, tienen en cuenta la apertura y cierre parcial de la fisura. La transición de la flexibilidad máxima a la mínima generalmente se representa mediante una función trigonométrica, por ejemplo con una función cosenoidal como la utilizada por Mayes y Davies en [38] y que se representa en la figura 2.22 c.

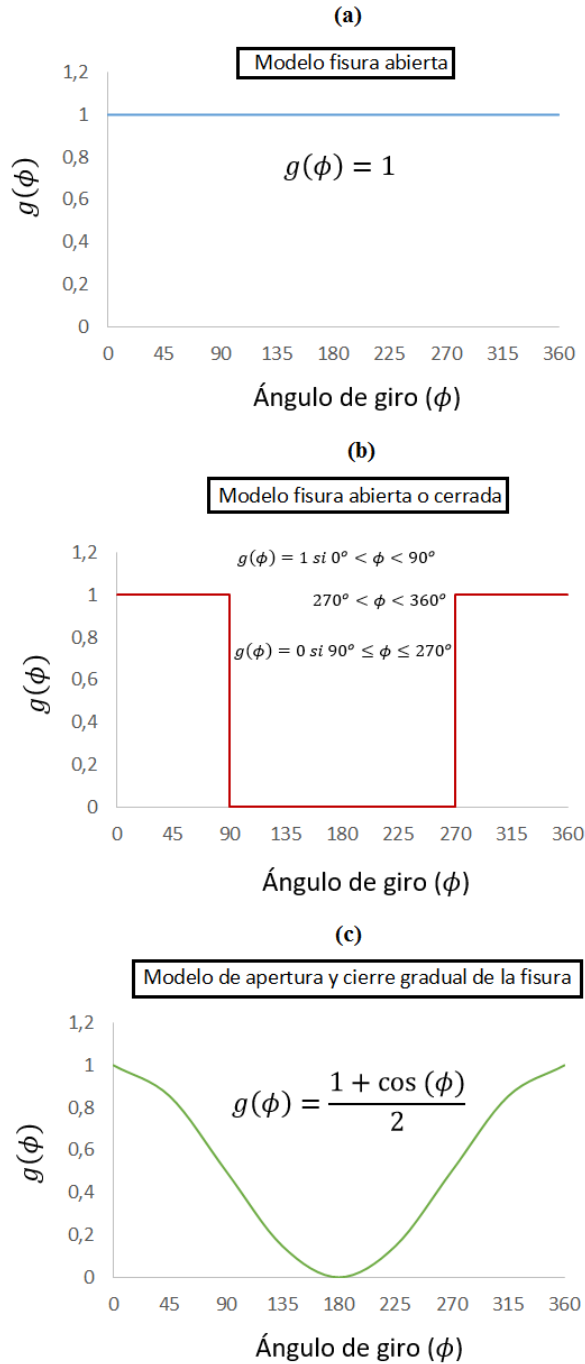


Figura 2.22: Modelos de apertura y cierre de la fisura. (a) Modelo de fisura abierta, (b) Modelo de fisura abierta o cerrada y (c) Modelo de apertura y cierre gradual de la fisura.

Posteriormente, se han desarrollado modelos más precisos basados en los modelos de apertura y cierre gradual, como los mostrados en la figura 2.23 y que se comentan a continuación:

- Darpe et al. en [7] propusieron un modelo basado en el concepto de “línea de cierre de fisura”(LCF). Dicha línea se define como una línea imaginaria recta perpendicular al frente de fisura recta que divide la parte abierta de la fisura de la cerrada y cuya posición varía a lo largo del giro del eje.
- Bachschmid et al. en [39] estudiaron el comportamiento de apertura y cierre de la fisura en ejes giratorios mediante el Método de Elementos Finitos (MEF) para una fisura de frente recto. Estos autores desarrollaron un modelo tridimensional sometido a una carga de flexión para las distintas posiciones angulares del eje fisurado.
- P. Rubio en [40] desarrolló un modelo de un eje fisurado tridimensional mediante el Método de Elementos Finitos similar al de Bachschmid et al. en [39]. En este trabajo se realizó un estudio de la apertura y cierre de la fisura más exhaustivo que el propuesto por Bachschmid, ya que se analiza un mayor número de posiciones angulares del eje.

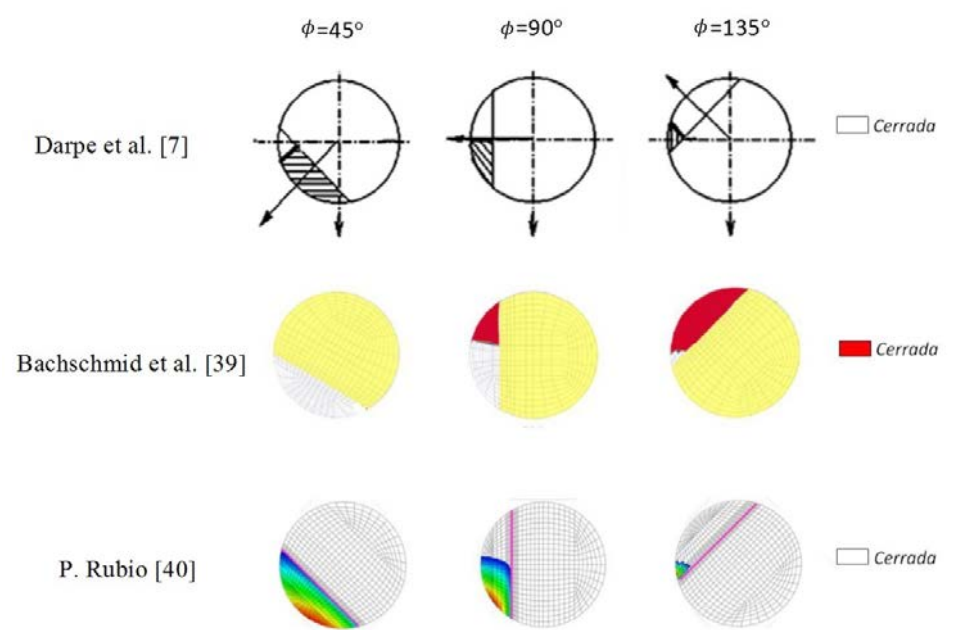


Figura 2.23: Modelos de apertura y cierre de la fisura. (a) Darpe et al. [7], (b) Bachschmid et al. [39] y (c) P. Rubio [40].

En estos tres últimos modelos de apertura y cierre de la fisura, se observa que los resultados obtenidos por Bachschmid y P. Rubio son similares. Comparando los resultados de estos dos trabajos con los obtenidos por Darpe, se observa que el modelo de Darpe predice que la zona de la fisura que permanece cerrada es mayor para las posiciones $\phi = 0^\circ$ y $\phi = 90^\circ$.

2.2.2 Órbitas de un eje fisurado

Las órbitas son el resultado de la representación del desplazamiento de dos movimientos en las direcciones x e y.

Las órbitas son diferentes en las distintas secciones del eje como se puede ver en la figura 2.24 donde se representan las órbitas descritas por distintas secciones a lo largo de la longitud del eje para $\frac{1}{3}\omega_c$ (a) y $\frac{1}{2}\omega_c$ (b). En el caso concreto de ejes rotatorios fisurados, en los que se conoce la existencia de dicha fisura, normalmente la sección que es objeto de estudio es la correspondiente a la sección fisurada. Por lo que la órbita será la representación del movimiento del punto central de la sección que presente la fisura.

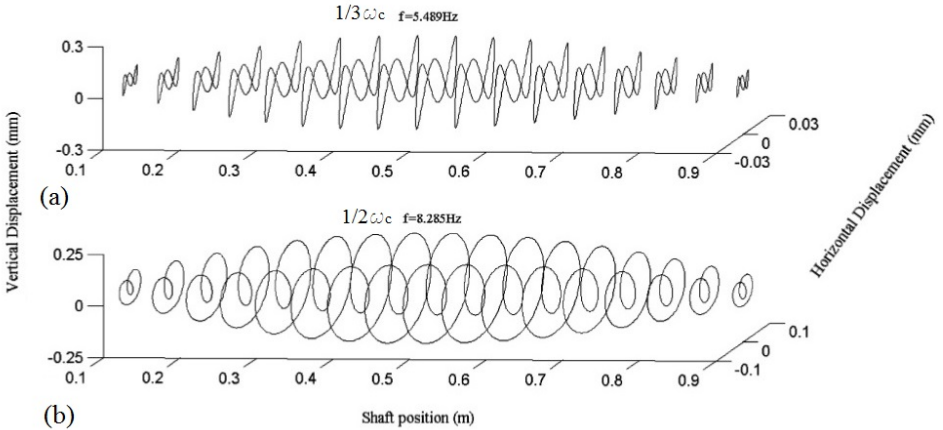


Figura 2.24: Órbitas en varias posiciones del eje para a) $\frac{1}{3}\omega_c$, b) $\frac{1}{2}\omega_c$ [34].

Las órbitas en presencia de una fisura pueden tener el mismo o distinto sentido que la velocidad de giro. Si es el mismo, la órbita se conoce como *forward whirl* y en caso contrario, como *backward whirl* [41].

En la figura 2.25 se muestran estos dos movimientos en un espectro de frecuencias. Se puede ver como cuando la velocidad de giro se encuentra entre las frecuencias críticas del eje en dirección x e y ($\omega_{nx} = \sqrt{\frac{k_x}{m}}$ y $\omega_{ny} = \sqrt{\frac{k_y}{m}}$) las órbitas son de tipo *backward*, y en caso contrario, de tipo *forward*. Aunque en este diagrama se representa la transición de la órbita a través de la velocidad crítica, no necesariamente tiene que ocurrir únicamente a esta velocidad, también sucederá en múltiplos y submúltiplos de la velocidad crítica [14], [41].

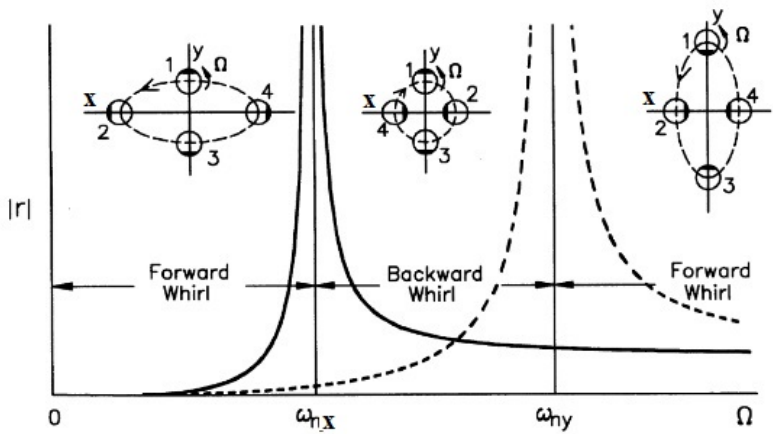


Figura 2.25: Órbitas debidas al desequilibrio de un rotor fisurado. *Forward whirl* y *backward whirl* [41].

En los rangos de velocidades cercanos a la velocidad crítica o a sus múltiplos y submúltiplos, aparecen una serie de lazos interiores o exteriores en la órbita según la velocidad de giro que se analice. Los lazos interiores son característicos del comportamiento *forward* y los lazos exteriores del comportamiento *backward* [16], [34]. Generalmente son objeto de estudio las zonas próximas a $\frac{1}{2}\omega_c$, $\frac{1}{3}\omega_c$ y $\frac{1}{4}\omega_c$, ya que son las zonas donde las órbitas presentan cambios más significativos y estos pueden utilizarse como indicadores de la existencia y propagación de fisuras.

En la figura 2.26 se muestran algunos ejemplos de órbitas correspondientes a velocidades de giro próximas a $\frac{1}{2}\omega_c$, $\frac{1}{3}\omega_c$ y $\frac{1}{4}\omega_c$ del eje, respectivamente.

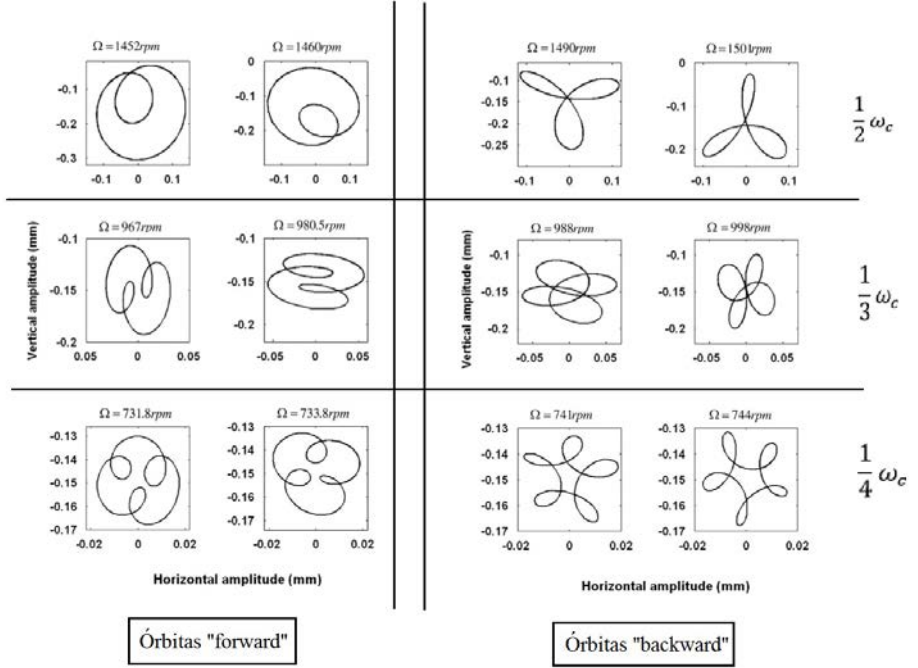


Figura 2.26: Órbitas tipo *forward* y *backward* alrededor de $\frac{1}{2} \omega_c$, $\frac{1}{3} \omega_c$ y $\frac{1}{4} \omega_c$ [36].

Se puede ver como las órbitas de la izquierda presentan un número de lazos interiores, que varían en función de la velocidad de giro del rotor. Si esta es próxima a $\frac{1}{2} \omega_c$, la órbita presenta un lazo interior, si es cercana a $\frac{1}{3} \omega_c$, dos lazos interiores, y si está girando alrededor de $\frac{1}{4} \omega_c$, el número de lazos se incrementa a tres. Estas curvas que presentan lazos interiores se denominan *epitrocoides*.

Por otro lado, las órbitas de la derecha presentan una serie de lazos exteriores, variando el número en función de la velocidad de giro del rotor. Si esta es próxima a $\frac{1}{2} \omega_c$, la órbita presenta tres lazos exteriores, si es cercana a $\frac{1}{3} \omega_c$, cuatro lazos exteriores, y si está girando alrededor de $\frac{1}{4} \omega_c$, el número de lazos se incrementa a cinco. Estas curvas que presentan lazos interiores se denominan *hipotrocoides*.

Por tanto, de forma general, se puede decir que si la órbita presenta lazos interiores y la velocidad de giro del sistema rotor es próxima a $\frac{1}{n} \omega_c$, el número de lazos que presenta la órbita es $n-1$.

Del mismo modo, en presencia de lazos exteriores y cuando la velocidad de giro del rotor es próxima a $\frac{1}{n}\omega_c$, el número de lazos exteriores es $n+1$.

Cuando las órbitas presentan lazos interiores, *epitrocoides*, se definen mediante las siguientes ecuaciones:

$$x = (R + r) \cos(\beta) - h \cos\left(\frac{R + r}{r}\beta\right) \quad y = (R + r) \sin(\beta) - h \sin\left(\frac{R + r}{r}\beta\right) \quad (2.10)$$

Siendo R el radio de la circunferencia directriz, r el radio de la circunferencia generatriz y h la distancia desde el punto que dibuja la curva hasta el centro de la circunferencia generatriz.

Como se representa en la figura 2.27, en el caso de que $h=r$, la curva se denomina epicicloide. Cuando $h<r$ se llama epicicloide acortada y si $h>r$, epicicloide alargada. En este último caso, los arcos de la curva pasan a ser lazos. Dado que el tamaño de los lazos aumenta según la profundidad de fisura, el valor de h estará relacionado con el tamaño de la fisura, aumentando en la medida que aumente α (siendo $\alpha = \frac{a}{D}$, donde a es la profundidad de la fisura y D es el diámetro del eje).

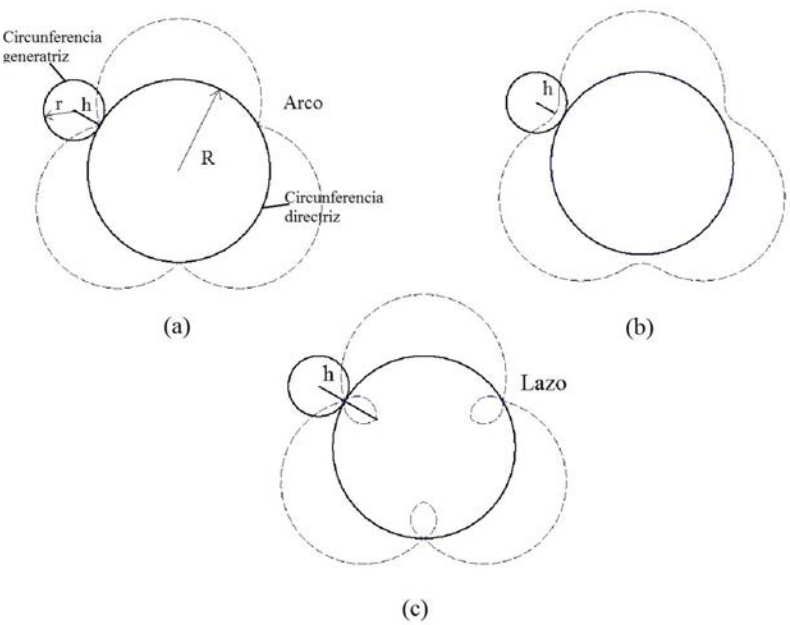


Figura 2.27: Tipo de epitrocoides. (a)Epicicloide. (b) Epicicloide acortada. (c) Epicicloide alargada.

El número de arcos o lazos de las órbitas depende del valor de la relación de los valores de R y r , definiéndose k como la razón entre R y r . Según el valor de k pueden darse tres casos distintos:

- Si k es un número entero, la epicicloide de una vuelta del eje completa será una curva cerrada con k lazos.
- Si k no es un número entero pero es un número racional, en una vuelta del eje el punto que dibuja la curva dará dos o más vueltas a la circunferencia directriz. En este caso la curva también es cerrada y los lazos de la curva de diferentes vueltas se cortarán.
- Si k no es un número entero y además es irracional, en una vuelta del eje se crea una curva transcendente que no regresa exactamente al punto de partida. Esta curva cubre la región entre los radios R y r .

Las propiedades de las epitrocoides podrían ser eventualmente utilizadas para relacionar las órbitas con la propagación de las fisuras.

El tamaño de la órbita y de los lazos puede ser un indicador de la propagación de la fisura, ya que según aumenta la profundidad de fisura en un sistema rotor, el tamaño de la órbita y de los lazos crece. En la figura 2.28, se muestra un ejemplo del trabajo [34] de órbitas cercanas a $\frac{1}{2}\omega_c$ en las que se puede ver como el lazo interior de la órbita crece a medida que la profundidad de fisura aumenta.

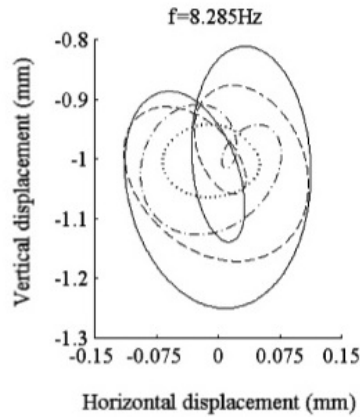


Figura 2.28: Órbitas según el tamaño de la fisura alrededor de $\frac{1}{2}\omega_c$ [34]. (.... $\alpha = 0.125$, -.-. $\alpha = 0.25$, - - - $\alpha = 0.375$, — $\alpha = 0.5$).

Si se realiza una comparación entre sistemas rotores diferentes, hay que tener en cuenta que a medida que aumenta la frecuencia natural del sistema rotor intacto, aumentan los desplazamientos y por tanto el tamaño de la órbita será mayor independientemente del tamaño de la fisura como se ilustra en la figura 2.29, donde se muestran las órbitas alrededor de $\frac{1}{2}\omega_c$ para distintos rotores. Las frecuencias naturales del eje intacto y las profundidades de fisura son $\omega_c = 3000\text{rpm}$, 2275rpm y 995rpm y $\alpha = 0.15, 0.32$ y 0.5 . En esta figura se puede ver como el tamaño de la órbita y del lazo interior es mayor para el sistema rotor que tiene mayor velocidad crítica del eje intacto ([36], $\omega_c = 3000\text{rpm}$), a pesar de ser el sistema con menor tamaño de la profundidad de fisura ($\alpha = 0.15$).

Figura 2.29: Órbitas alrededor de $\frac{1}{2}\omega_c$ para una profundidad de fisura de $\alpha = 0.15, 0.32$ y 0.5 [36], [23] y [34].

Por otro lado, la forma de la órbita es muy sensible a los cambios de la velocidad de giro como se puede ver en la figura 2.30, en la que se representan los resultados obtenidos en [34], para la zona cercana a $\frac{1}{2}\omega_c$. Se observa que pequeños cambios en la velocidad de giro, hacen que la órbita descrita por la sección fisurada del eje cambie tanto en tamaño como en forma. Por ejemplo, si se comparan las órbitas descritas por el eje fisurado a unas frecuencias de $f = 8.245\text{Hz}$ y $f = 8.291\text{Hz}$ (recuadradas en rojo) se observa que un cambio en la frecuencia de un 0.55% da como resultado dos órbitas distintas en las que la primera no presenta lazos interiores y tiene forma de "boomerang" y en la segunda aparece el lazo interior indicador de que la velocidad de giro es cercana a $\frac{1}{2}\omega_c$.

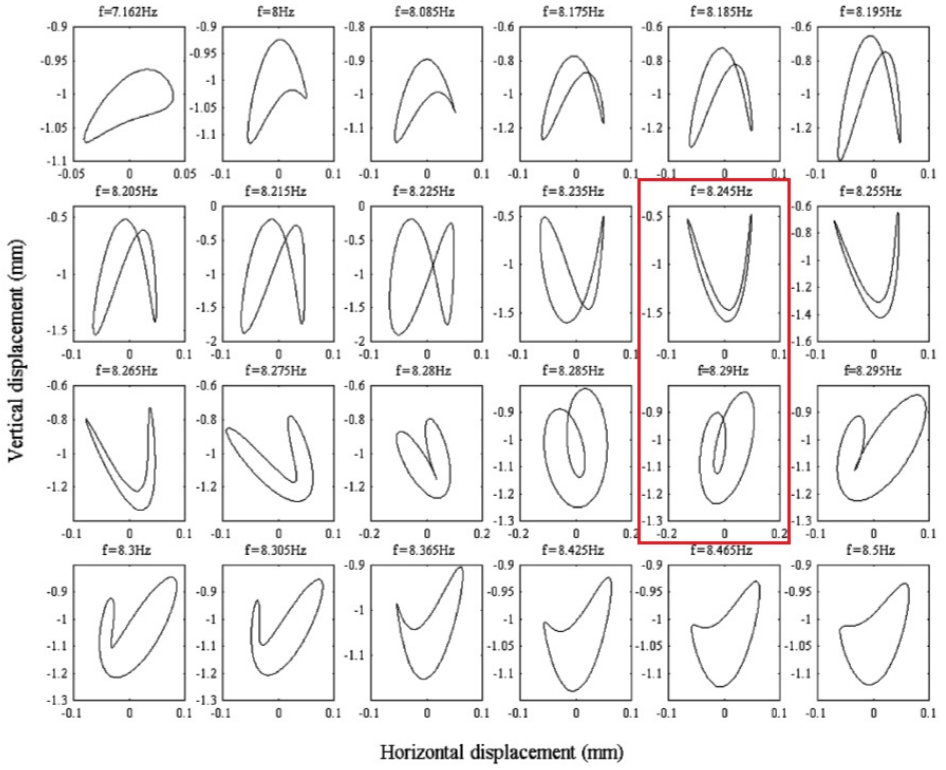


Figura 2.30: Cambio en la órbita según velocidad de giro [34].

Cabe destacar, la diversidad de resultados que existe en la literatura en cuanto a órbitas se refiere para un mismo múltiplo y submúltiplo de la velocidad crítica. En las figuras 2.31, 2.32 y 2.33, se muestran algunos de los resultados de la bibliografía para $\frac{1}{2}\omega_c$, $\frac{1}{3}\omega_c$ y $\frac{1}{4}\omega_c$.

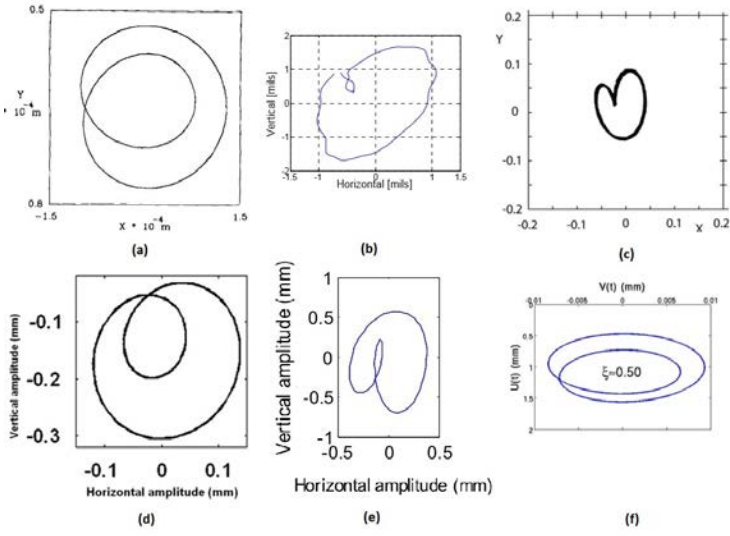


Figura 2.31: Diversidad de resultados alrededor de $\frac{1}{2}\omega_c$. (a) [31], (b) [42], (c) [43], (d) [36], (e) [23], (f) [44].

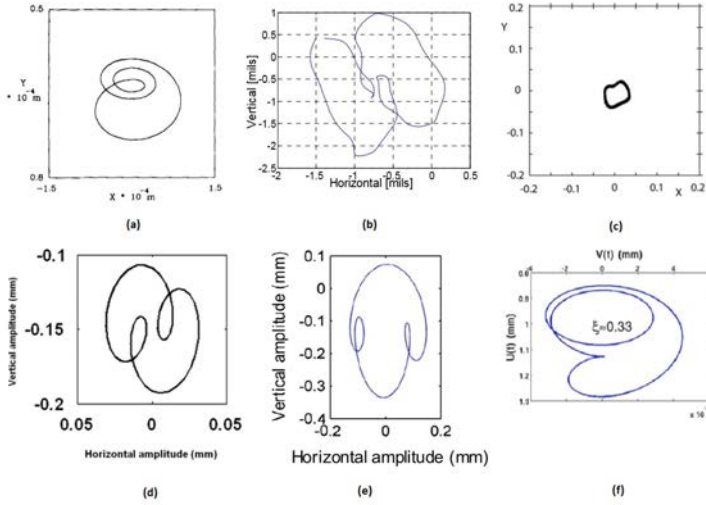


Figura 2.32: Diversidad de resultados alrededor de $\frac{1}{3}\omega_c$. (a) [31], (b) [42], (c) [43], (d) [36], (e) [23], (f) [44].

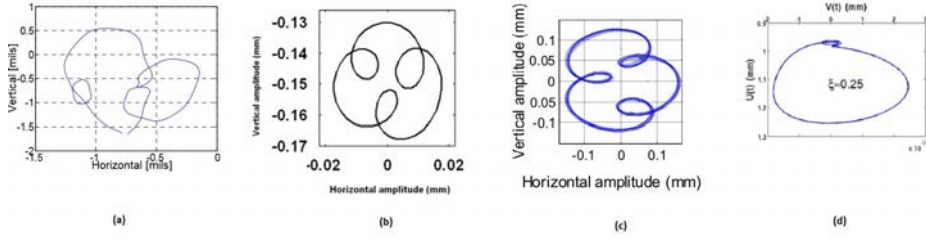


Figura 2.33: Diversidad de resultados alrededor de $\frac{1}{4}\omega_c$. (a) [42], (b) [36], (c) [23], (d) [44].

Se puede ver que las órbitas presentan diferencias en cuanto a tamaño o forma, debidas simplemente a que el sistema rotor no es el mismo (cambios geométricos en el eje, en los apoyos, en la posición de las cargas...), o para un mismo rotor, si la profundidad de fisura es distinta, pero en todos ellos el número de lazos se corresponde con la velocidad subcrítica estudiada.

En la figura 2.34, se muestra un ejemplo de los resultados obtenidos por Rodríguez et al. en [42]. En este caso se analiza el mismo rotor de forma teórica y experimental para $\frac{1}{2}\omega_c$ y $\frac{1}{3}\omega_c$. En este trabajo se desarrolla un modelo 1D mediante el método de elementos finitos con 12 nodos. Estos autores validan el modelo teórico dado que obtienen órbitas similares y se producen el mismo número de lazos según a la velocidad de giro del eje.

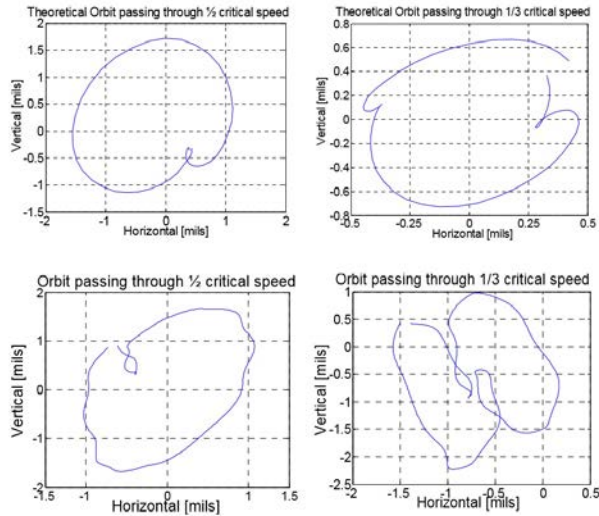


Figura 2.34: Diferencias en los resultados teóricos y experimentales alrededor de $\frac{1}{2}\omega_c$ y $\frac{1}{3}\omega_c$ [42].

En las figuras 2.35 y 2.36 se muestra otro ejemplo de la variación de resultados obtenidos de forma experimental y analítica respectivamente por Guo et al. en [23]. En ambas figuras se muestran resultados para $\frac{1}{2}\omega_c$ (parte superior) y $\frac{1}{3}\omega_c$ (parte inferior). Estos autores resuelven el modelo 2D desarrollado mediante el método de elementos finitos en [36]. Al igual que en el caso anterior, los autores validan su modelo por la similitud con los resultados experimentales, ya que el número de lazos de las órbitas es el mismo para la misma velocidad subcrítica.

Por tanto, de forma general se puede decir que aunque existen diferencias, todas las órbitas de un eje fisurado presentan el mismo número de lazos interiores o exteriores en los mismos múltiplos y submúltiplos de la velocidad crítica independientemente del rotor que se analice.

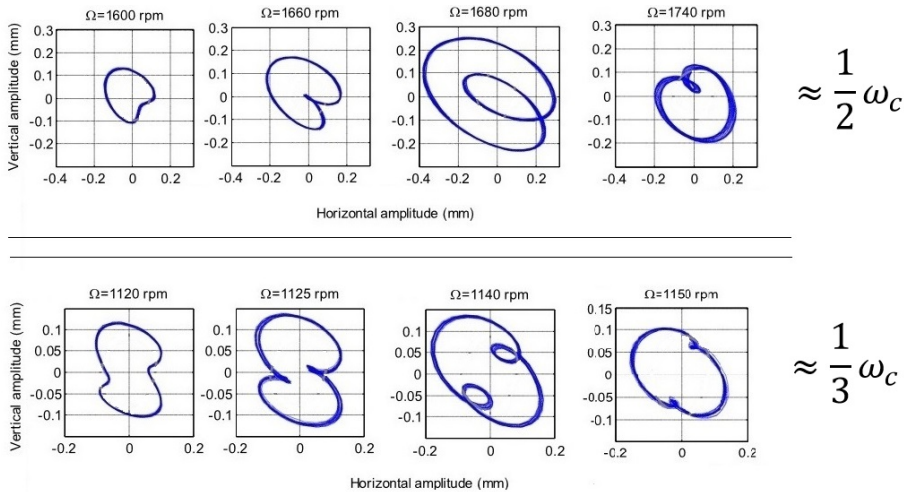


Figura 2.35: Resultados experimentales alrededor de $\frac{1}{2}\omega_c$ y $\frac{1}{3}\omega_c$ [23].

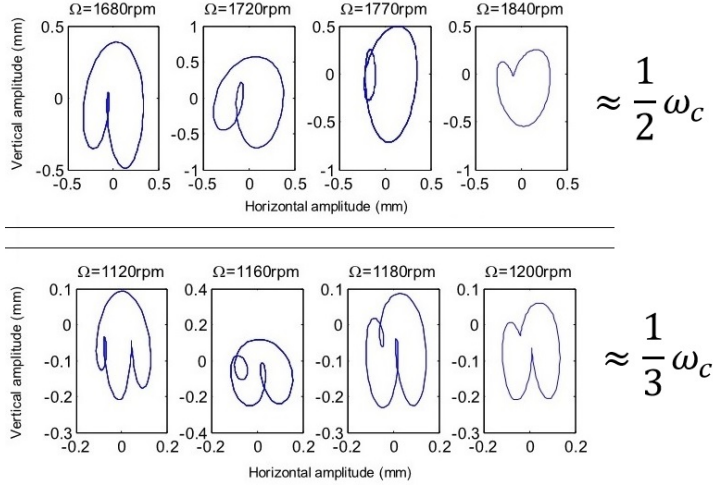


Figura 2.36: Resultados analíticos alrededor de $\frac{1}{2}\omega_c$ y $\frac{1}{3}\omega_c$ [23].

2.2.3 *Análisis del comportamiento de un eje fisurado en el dominio de la frecuencia. Transformada Rápida de Fourier (FFT)*

La característica del espectro de frecuencias de un eje desequilibrado fisurado es la presencia de dos componentes de vibración 1X y 2X en cualquier velocidad de giro, una de ellas causada por el desequilibrio (1X) y que aparece en la frecuencia correspondiente a la velocidad de giro del rotor, y otra por la presencia de la fisura (2X) y que aparece en el doble de la velocidad de giro. En la figura 2.37 se muestran el espectro de frecuencias obtenido por Varney et al. en un eje fisurado a una velocidad de giro distinta de la crítica en la que se observan estas dos componentes [45].

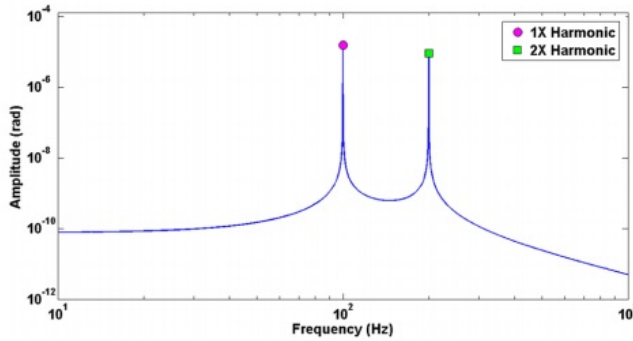


Figura 2.37: FFT para un eje fisurado a 100 Hz [45].

Por tanto, la presencia de estas dos componentes en cualquier velocidad de giro de un rotor, es un indicador de la existencia de una fisura.

Darpe et al. en [7] analizan el comportamiento de un Jeffcott Rotor fisurado mediante el espectro de frecuencias en un $\frac{1}{5}\omega_c$, $\frac{1}{3}\omega_c$ y $\frac{1}{2}\omega_c$ tanto analítica (figura 2.38) como experimentalmente (figura 2.39). Estos autores observan que debido a la presencia de la fisura en el rotor, cuando la velocidad de giro es $\frac{1}{n}\omega_c$ aparecen nX de armónicos en el espectro de frecuencia. Dada la similitud de los resultados analíticos con los experimentales, validan su modelo.

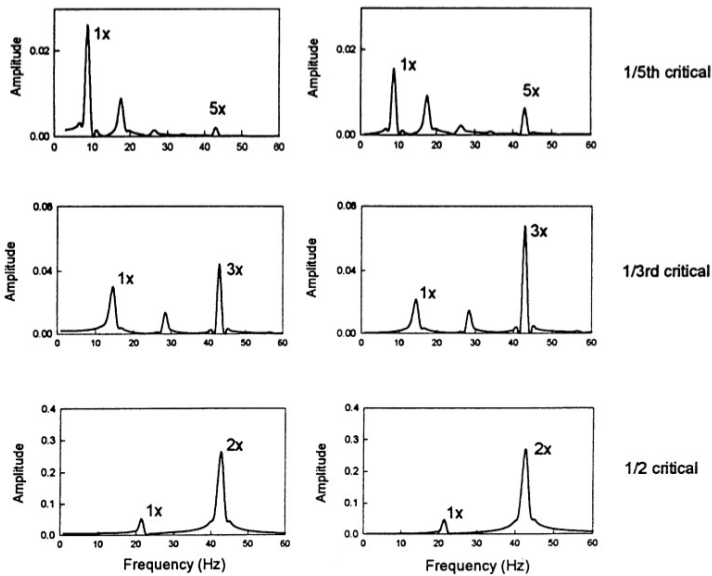


Figura 2.38: Resultados analíticos de la FFT para un eje fisurado (a) $\frac{1}{5}\omega_c$ (b) $\frac{1}{3}\omega_c$ y (c) $\frac{1}{2}\omega_c$ [7].

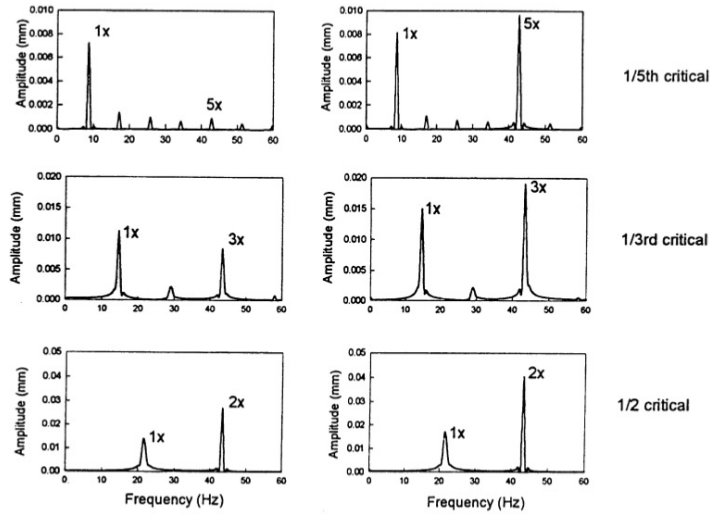


Figura 2.39: Resultados experimentales de la FFT para un eje fisurado (a) $\frac{1}{5}\omega_c$ (b) $\frac{1}{3}\omega_c$ y (c) $\frac{1}{2}\omega_c$ [7].

Autores como Ansari et al. en [46] analizan la FFT en un rotor fisurado experimentalmente. En la figura 2.40 se muestran los resultados obtenidos a $\frac{1}{4}\omega_c$ y $\frac{1}{2}\omega_c$ (10 y 20 Hz respectivamente). Se puede ver como en el caso de $\frac{1}{4}\omega_c$ en el espectro de frecuencias predominan cuatro frecuencias sobre el resto (marcadas en rojo) correspondientes a 1X, 2X, 3X y 4X, y en el caso de $\frac{1}{2}\omega_c$ predominan dos frecuencias 1X y 2X.

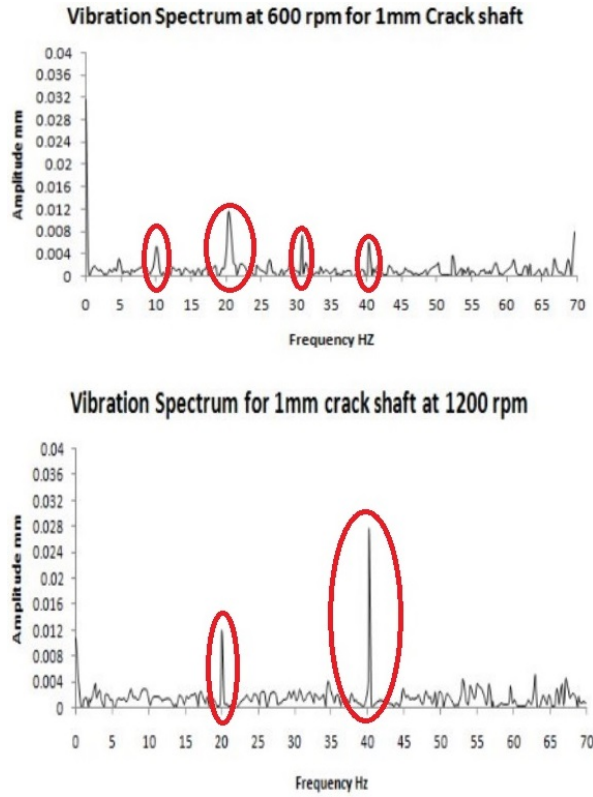


Figura 2.40: FFT para un eje fisurado (a) $\frac{1}{4}\omega_c$ (b) $\frac{1}{2}\omega_c$ [46].

El Arem et al. en [44] analizan el espectro de frecuencias de un rotor fisurado a través de un modelo numérico. Los resultados obtenidos para velocidades próximas a $\frac{1}{4}\omega_c$, $\frac{1}{3}\omega_c$ y $\frac{1}{2}\omega_c$ se muestran en la figura 2.41. En esta se observa como en la proximidades de dichas velocidades en el espectro de frecuencia predominan sobre el resto cuatro, tres y dos frecuencias proporcionales a la velocidad de giro ($1X$) respectivamente.

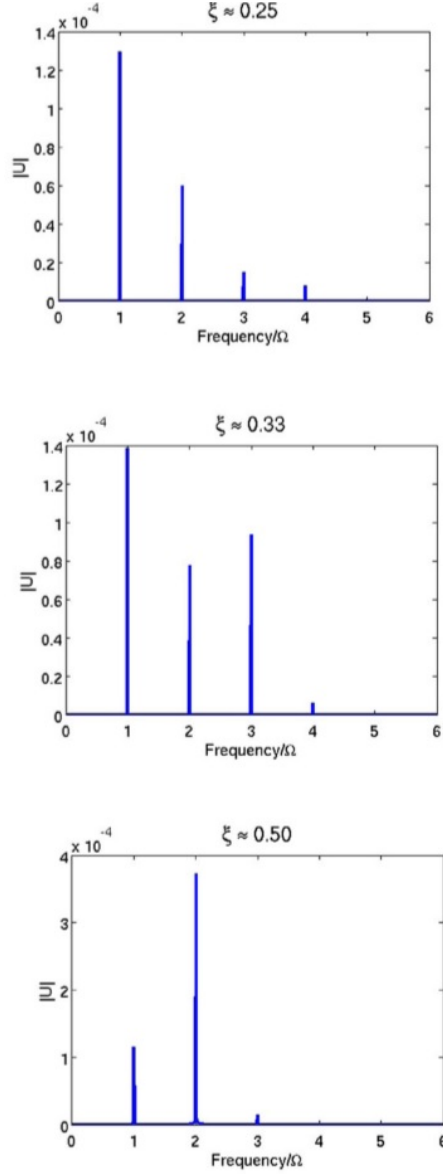


Figura 2.41: FFT para un eje fisurado (a) $\frac{1}{4}\omega_c$ (b) $\frac{1}{3}\omega_c$ y $\frac{1}{2}\omega_c$ [44].

Se puede decir que los resultados de estos autores están en concordancia con lo explicado en 2.1.3 y por tanto, el número de armónicos que predominan sobre el resto de la señal, n , en velocidades de giro $\frac{1}{n}\omega_c$, es un indicador de la presencia de fisuras en el sistema rotor.

Además, si se comparan los resultados de la FFT obtenidos por El Arem et al. en [44] con los de las órbitas obtenidos en el mismo trabajo y mostradas en las figuras 2.34 (f), 2.35 (f) y 2.36 (d), se observa que cuando la velocidad de giro de un rotor fisurado es $\frac{1}{n}\omega_c$ y por tanto, en el espectro de frecuencias asociado a dicha velocidad predominan n frecuencias, el número de lazos que presenta la órbita es $n-1$.

2.3 MECÁNICA DE LA FRACTURA

Esta disciplina surge a principios del siglo XX partiendo de una fuerte base teórica hasta alcanzar importantes aplicaciones prácticas. El objetivo principal de la mecánica de la fractura es analizar y estudiar el comportamiento mecánico de los elementos estructurales considerando la existencia de fisuras, sea cual sea su origen, hasta definir las condiciones o criterios de rotura.

En problemas donde aparecen sólidos que presentan defectos o fisuras, las ecuaciones constitutivas de la teoría de la elasticidad no tienen en cuenta el fenómeno de concentración de tensiones en los extremos de una fisura. Por ello, es necesario usar los principios de la Mecánica de la Fractura.

2.3.1 *Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL)*

La Mecánica de la Fractura Elástica Lineal (MFEL) es la primera teoría desarrollada específicamente para explicar la propagación de fisuras y la fractura de componentes mecánicos. Fue propuesta inicialmente por Griffith en 1920 [47] y desarrollada posteriormente por Irwin en 1957 [48]. La principal aplicación de la MFEL consiste en explicar y predecir la rotura de materiales frágiles, en los que la rotura aparece en presencia de muy poca plasticidad. Inicialmente se aplicó exclusivamente a los materiales metálicos, sobre todo aceros de alta resistencia y aceros estructurales con zonas fragilizadas, y aunque actualmente se sigue empleando con éxito en estos materiales, su campo de aplicación ha sido ampliado a materiales cerámicos e incluso a algunos polímeros [49].

En sólidos elásticos que presentan fisuras, es necesario diferenciar los distintos tipos de movimientos relativos que pueden presentar las caras que conforman dicha grieta. Así pues, se definen tres tipos de modos de fractura, los cuales se

representan en la figura 2.42. En el modo *I* (apertura) las tensiones y los desplazamientos son perpendiculares al plano de la fisura, provocando una separación entre los caras de la grieta. En el modo *II* (cortadura) las tensiones y desplazamientos están contenidas en el plano de la fisura, perpendiculares al frente de fisura y con sentidos opuestos entre sí. Por último, en el modo *III* (cizalladura) las tensiones y los desplazamientos están contenidos en el plano de la fisura y son paralelas al frente de fisura, pero con sentidos opuestos.

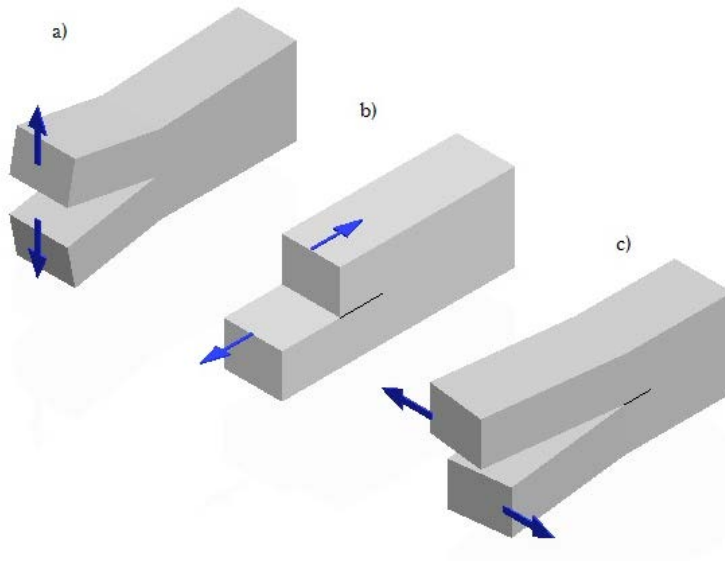


Figura 2.42: Modos básicos de fractura: a) Modo I, b) Modo II, c) Modo III.

El principio de la mecánica de la fractura indica que todos los procesos de fractura tienen lugar en una pequeña zona cercana al frente de la fisura, mientras que el resto del sólido mantiene un comportamiento elástico lineal. Los campos de tensiones generados en las zonas cercanas de una fisura están caracterizados por el parámetro K , denominado *Factor de Intensidad de Tensiones (FIT)*. Este define la magnitud de las tensiones locales en el entorno del fondo de la fisura y se expresa de la siguiente manera:

$$K_I = F_I \sigma \sqrt{\pi a} \quad (2.11)$$

donde σ es la tensión de referencia que depende de la sollicitación externa; F_I es el factor de corrección adimensional que depende de la geometría de la fisura,

también denominado *FIT adimensional*; y a es la profundidad de la fisura.

Cuando el FIT alcance un valor crítico, la fisura se propagará. Este valor crítico es denominado Tenacidad de Fractura K_{IC} y es una propiedad del material. Así, el criterio local de fractura en Modo I queda determinado de la siguiente manera:

$$K_I \geq K_{IC} \quad (2.12)$$

Cualquiera de los tres modos descritos anteriormente pueden aparecer de manera individual o como combinación de ellos. En el primer caso, se denominarían modos puros, y en el segundo, modos mixtos. Estos modos dan lugar a tres factores de intensidad de tensiones denominados como K_I , K_{II} y K_{III} . Sin embargo, los fallos más frecuentes en componentes mecánicos se deben al Modo I , razón por la cual es el modo más utilizado.

2.3.2 *Cálculo del FIT en ejes fisurados rotatorios*

El comportamiento mecánico de los ejes fisurados se puede abordar a partir del conocimiento del FIT. Existen diferentes métodos para el cálculo del FIT que pueden ser clasificados en tres grupos:

- *Métodos analíticos*: proporcionan las ecuaciones para calcular los campos de tensiones y deformaciones. Destacan los que se basan en el análisis de la integral de contorno J [50] y el método de los desplazamientos relativos de los puntos de las caras de la fisura (CTOD), utilizado para el cálculo del FIT en la presente Tesis.

Como ejemplo de métodos analíticos, los autores Shih y Chen en [51] utilizaron el CTOD para el cálculo del FIT en el punto central y en los extremos del frente de fisura en una barra de sección circular sometida a esfuerzos de tracción y flexión en condiciones estáticas. En la figura 2.43 se muestran los resultados obtenidos en el punto central (A) y en el extremo (B) del frente de fisura cuando el eje está sometido a flexión para distintas profundidades de fisura.

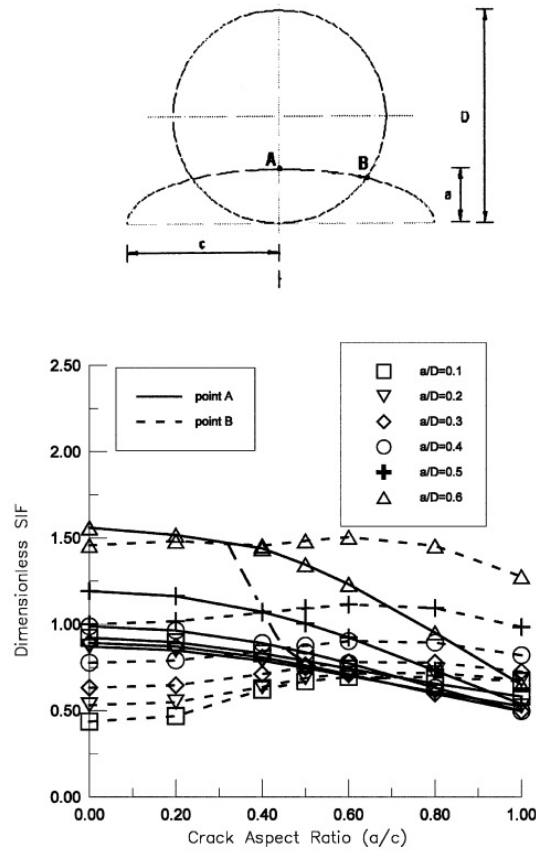


Figura 2.43: FIT en el punto central (A) y en el extremo (B) del frente de fisura cuando el eje está sometido a flexión [51].

- *Métodos numéricos*: permiten obtener el FIT en cualquier punto del frente de fisura. Principalmente se utiliza el Método de Elementos Finitos (MEF) aunque también se usa el Método de Elementos de Contornos.

Como ejemplo, Carpinteri [52], [53] analizó el FIT en barras cilíndricas mediante métodos numéricos y más tarde Shih y Chen [54] partiendo de los resultados de Carpinteri realizaron una serie de ajustes polinómicos para obtener una expresión para el centro y el extremo de la fisura en condiciones estáticas.

Fonte y Freitas [55] obtuvieron el FIT numéricamente en modo I para fisuras semielípticas en barras cilíndricas a lo largo del frente de fisura en condiciones estáticas.

Rubio en [40] obtuvo el FIT en un eje mediante un modelo cuasiestático 3D, a partir del módulo específico para el cálculo de fractura de Abaqus denominado "módulo crack", para diferentes posiciones angulares durante una vuelta teniendo en cuenta y evaluando diferentes tamaños y formas de la fisura. En la figura 2.44 se muestran los resultados del FIT obtenidos en los distintos puntos del frente de fisura (γ) para un eje que presenta una profundidad de fisura de $\alpha = 0.5$.

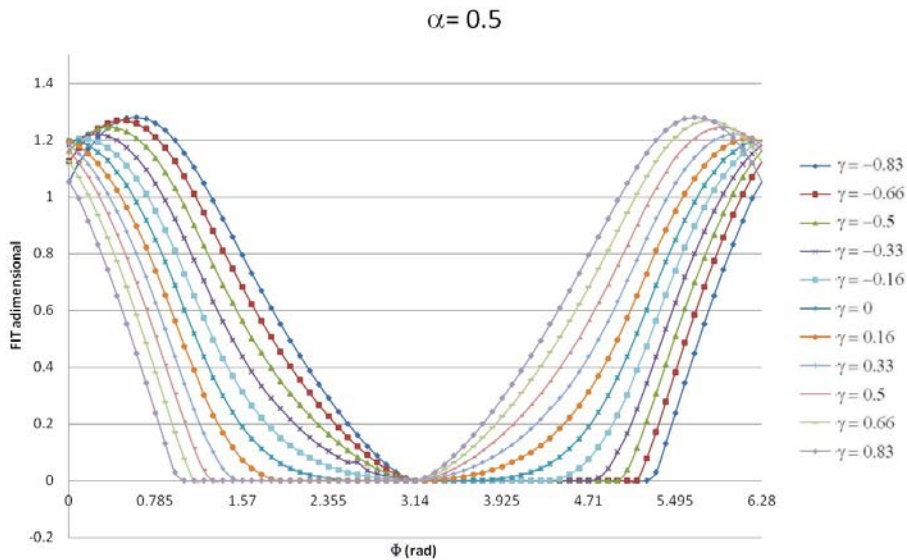


Figura 2.44: Ejemplo del FIT adimensional a lo largo de un giro del eje en un modelo cuasiestático [40].

- *Métodos experimentales:* en los que el FIT es calculado a partir del campo de tensiones deformaciones o desplazamientos obtenidos experimentalmente. Algunos de los métodos que caben destacar son:
 - *Fotoelasticidad.* Es una técnica para el análisis de esfuerzos, a través de la cual es posible visualizar el lugar geométrico de los puntos del sólido donde la diferencia entre las tensiones principales es una constante conocida. Lorentzen et al. en [56] desarrollaron un método teórico pa-

ra el cálculo del FIT para fisuras superficiales semielípticas en ejes que fue validado a través de ensayos de fotoelasticidad.

- *Fractografía*. El propósito de esta técnica es analizar las características de la fractura para intentar relacionar la topografía de la superficie de fractura con las causas y/o los mecanismos básicos de la fractura. Es utilizada por Fonte y Freitas en [57] donde a partir de datos de propagación obtienen el FIT. En la figura 2.45, se observa la microestructura de la superficie fisurada al inicio (a) y al final (b) de la propagación de esta.

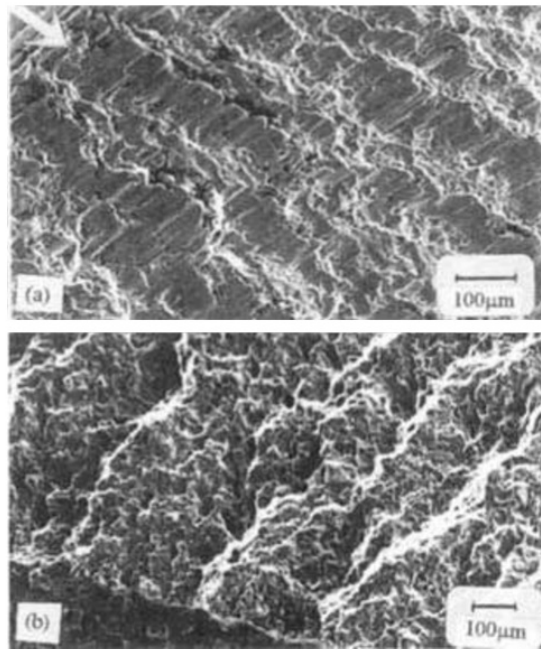


Figura 2.45: Microestructura de la superficie fisurada (a) inicio y (b) final de la propagación de la fisura [57].

Hasta ahora todos los modelos que se utilizan para estudiar el FIT son modelos cuasiestáticos, es decir, para simular la rotación del eje consideran diferentes posiciones angulares de la fisura [40], [58], [59]. Estos sirven como aproximación, pero no representan la realidad, ya que no tienen en cuenta la dinámica del problema. Hasta ahora, en conocimiento de la autora, no se ha llevado a cabo un estudio del FIT en un modelo numérico 3D dinámico, por ello, este es uno de los objetivos de la presente Tesis Doctoral.

2.3.3 *Propagación de fisuras*

La propagación de fisuras de fatiga es un fenómeno de gran importancia con respecto a la evaluación de la seguridad estructural de los componentes mecánicos. Desde los años sesenta del siglo XX se estudia proceso de propagación estable de fisuras, con el objetivo de obtener la tasa de crecimiento expresada como el crecimiento por ciclo, $\frac{da}{dN}$ [60], [61].

Paris y Erdogan en [62] propusieron una ley empírica (Ley de Paris-Erdogan) basada en los conceptos de la MFEL, mediante la que demostraron que el crecimiento de la fisura por ciclo de carga, $\frac{da}{dN}$, es función de la variación del FIT, según la siguiente expresión:

$$\frac{da}{dN} = C \Delta K^m \quad (2.13)$$

donde C y m son constantes del material.

En la figura 2.46 se representan las tres fases de crecimiento de una fisura de fatiga.

- Fase I: fase de iniciación en la que tanto la fisura como su crecimiento son pequeños y su comportamiento no es interpretable mediante criterios de fractura lineal. En esta zona tienen gran influencia la microestructura del material, la tensión media y las condiciones ambientales. Esta fase presenta el valor umbral, ΔK_{th} por debajo del cual no hay propagación de la fisura.
- Fase II: en esta fase la influencia de la microestructura del material es poco importante. La Ley de Paris-Erdogan se corresponde con esta fase de la curva y coincide con la fase de mayor interés en los estudios de fatiga. Este tramo se representa con una relación lineal en el diagrama doblemente logarítmico, lo que simplifica el estudio de la propagación de la fisura.
- Fase III: en esta fase la pendiente de la curva aumenta hasta que se produce la rotura del componente.

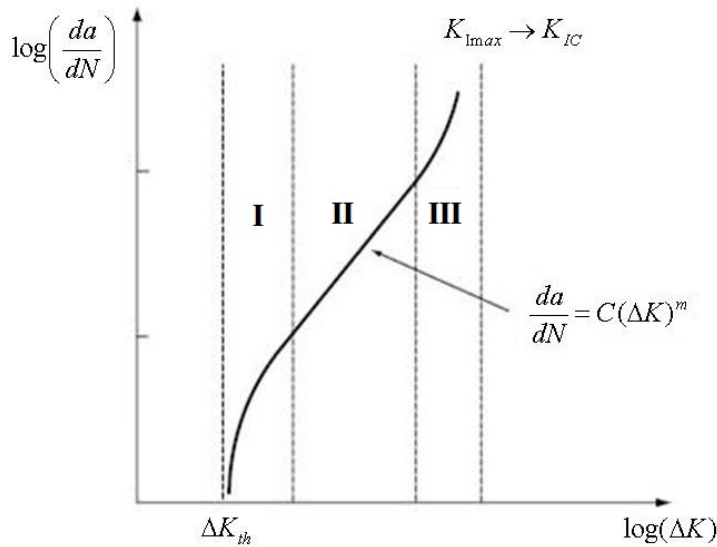


Figura 2.46: Relación entre la velocidad de propagación de la fisura de fatiga $\frac{da}{dN}$, y la variación del FIT ΔK

A través de la integración de esta ley, se puede obtener el tamaño que puede alcanzar una fisura tras sufrir un determinado número de ciclos o el número de ciclos que son necesarios para una que una fisura crezca hasta un determinado tamaño.

Aunque existen otros modelos empíricos y semi-empíricos más complejos que la Ley de Paris, esta sigue siendo la más utilizada en la práctica. Autores como Carpinteri en [58] utilizan dicha Ley para analizar el crecimiento de fisuras por fatiga en un eje cilíndrico sometido a flexión rotativa. Este autor determina las trayectorias de propagación haciendo uso de un modelo teórico biparamétrico basado en la Ley de Paris y consideró que en una vuelta completa del eje, para un punto del frente de fisura determinado, se produce una variación del FIT.

Otros autores como Toribio et al. en [63] estudian el FIT bajo sollicitación axial cíclica. Estos modelizaron el crecimiento de fisuras en barras cilíndricas haciendo uso del método de mínimos cuadrados para reconstruir el nuevo frente.

Rubio, por su parte, analiza en [40] la propagación de una fisura semielíptica contenida en un eje giratorio para lo que adapta un algoritmo de integración de la Ley de Paris, a partir de un modelo analítico, que permite reconstruir el nuevo frente de fisura después del crecimiento producido en cada giro. Esta autora concluye que independientemente de la forma inicial del frente, este se convierte

gradualmente en recto y que si la forma del frente es recto, debido a que se producen avances de mayor magnitud en los extremos que en el centro, la forma del frente cambia de convexa a cóncava.

TÉCNICAS EXPERIMENTALES

En este tercer capítulo se hace una descripción de los dispositivos experimentales y la metodología que ha sido empleada para la realización de los ensayos que se incluyen en esta Tesis Doctoral. Además, se muestran y analizan los resultados obtenidos (órbitas y espectro de frecuencias) mediante los que se consigue caracterizar el comportamiento de un eje fisurado, pudiendo así determinar la presencia de una fisura e identificarla a partir del cálculo de la velocidad crítica, siguiendo el procedimiento presentado en este trabajo. Una vez calculada la velocidad crítica, se propone una metodología para la estimación de la fisura. También se realiza una discusión de los resultados, en la que se estudia la profundidad de la fisura inicial, la evolución de esta en los ensayos y la influencia en el comportamiento dinámico de la orientación de la masa excéntrica.

3.1 METODOLOGÍA DE ENSAYO

3.1.1 *Dispositivos experimentales*

3.1.1.1 *Banco de ensayos de ejes giratorios*

Con el objetivo de estudiar experimentalmente el comportamiento dinámico de un eje fisurado se ha puesto a punto un dispositivo experimental de dinámica de ejes, ver figura 3.47. Los elementos principales de dicho dispositivo son:

- Un eje apoyado en sus extremos con un disco en su sección central.
- Una bancada.
- Un sistema de control y adquisición de datos.



Figura 3.47: Banco de ensayos de ejes giratorios.

La disposición del eje a ensayar es similar a la que se conoce en la bibliografía como Jeffcott Rotor, que consta de un eje que tiene situado un disco en la mitad de su longitud tal y como se muestra en la figura 3.48. El banco dispone de un cabezal de arrastre, accionado por un servomotor, y un contrapunto, que permiten ensayar ejes de diferentes longitudes y diámetros, así como variar la velocidad de giro.

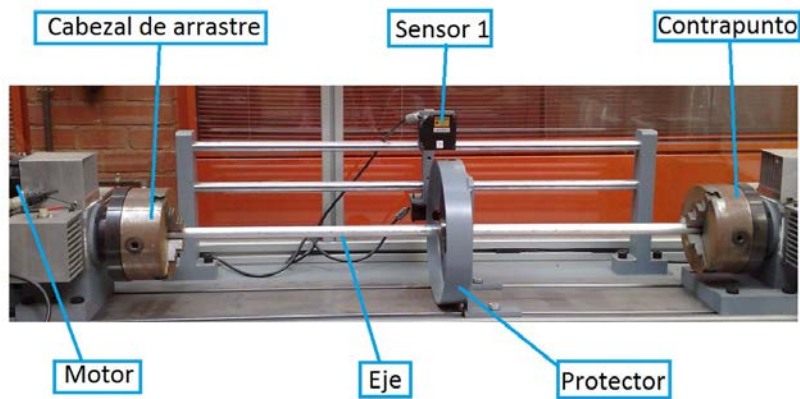


Figura 3.48: Disposición del eje en los ensayos experimentales.

El diseño del disco, que consta de una serie de huecos, permite acoplar una o varias masas excéntricas. En la figura 3.49 se puede ver un esquema general de la disposición del disco y la masa excéntrica. La parte rayada representa la fisura del eje y la masa excéntrica se representa en negro. También se puede ver la posición de los sensores, el protector del disco, el disco y el eje.

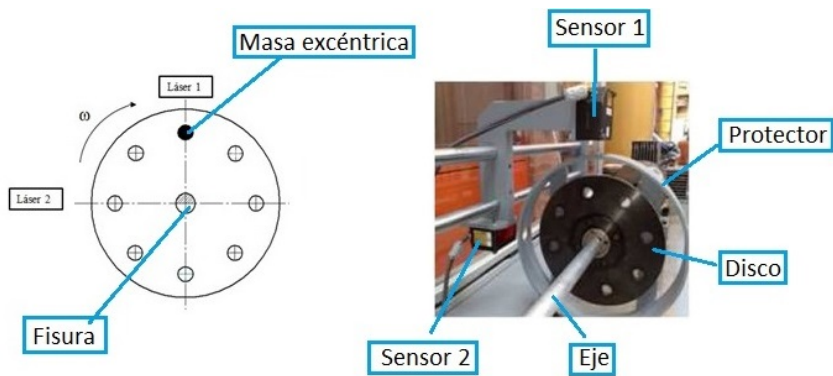


Figura 3.49: Esquema de la disposición del disco y la masa excéntrica.

En la figura 3.50 se muestra un esquema general de la cadena de medida. Esta se compone de los sensores que miden los desplazamientos, el acondicionador de señal y el ordenador donde está instalado el software que permite visualizar, guardar, y realizar el procesamiento de los datos obtenidos (espectro de las frecuencias, dominio tiempo, análisis de órbitas, etc).

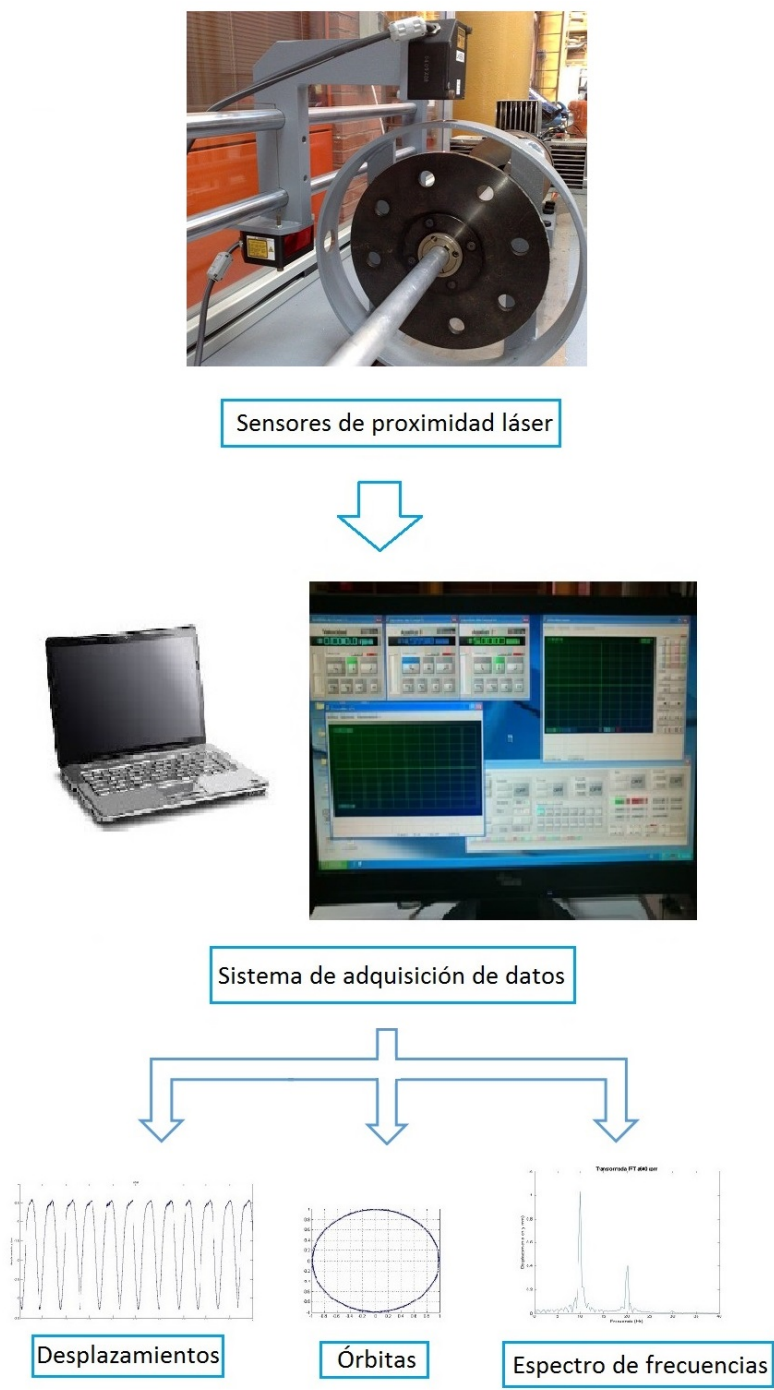


Figura 3.50: Esquema cadena medida utilizada en los ensayos experimentales.

El sensor es un dispositivo diseñado para recibir información de una magnitud del exterior y transformarla en otra magnitud, normalmente eléctrica, que es posible de cuantificar y procesar. Entre los muchos tipos de sensores que existen, están los sensores de desplazamiento, cuya función principal es la de medir o detectar la posición de un determinado objeto en el espacio.

El tipo de sensor utilizado para medir experimentalmente desplazamientos del eje en esta Tesis, es un sensor láser inteligente de la marca OMRON, LS-LD50, cuyas características se resumen en la tabla 3.2. Este tipo de sensores se basan en la tecnología CMOS (del inglés Complementary Metal Oxide Semiconductor, "Metal Óxido Semiconductor Complementario"). Esto permite medir con una precisión de $0.25\text{ }\mu\text{m}$ con una frecuencia de muestreo de 10 kHz. Los desplazamientos horizontales y verticales medidos sobre el eje se amplifican, acondicionan, y visualizan en el ordenador mediante la representación de las órbitas.

El dispositivo de seguridad del que consta este banco de ensayos consiste en establecer un máximo en los desplazamientos a partir del cual la máquina se para por seguridad. En este caso, dado que las vibraciones que se producen en el ensayo son considerables, el máximo establecido es de 5 mm.

Tabla 3.2: Características sensor *LS-LD50*.

Sistema óptico	Reflexión sobre objeto	Reflexión puntual
Distancia central de medida	50 mm	47 mm
Rango de medida	±5mm	±4mm
Fuente de luz	Láser semiconductor	
Forma de haz	Línea	
Diámetro del haz	900 x 60 μs	
Linealidad	±0.1 % EC	
Resolución	0.8 μm	
Características de temperatura	0.02 % EC °C	
Ciclo de muestreo	110 μs (modo de alta velocidad)	
	500 μs (modo estándar)	
	2.2 ms (modo de alta precisión)	
	4.4 ms (modo de alta sensibilidad)	
Indicadores LED	Indicador NEAR	- Se ilumina cerca de la distancia central de medida y más cerca que la distancia central de medida dentro del rango de medida - Parpadea cuando el objetivo de medida está fuera del rango de medida o cuando no es suficiente la cantidad de luz recibida
	Indicador FAR	- Se ilumina cerca de la distancia central de medida y más lejos que la distancia central de medida dentro del rango de medida - Parpadea cuando el objetivo de medida está fuera del rango de medida o cuando no es suficiente la cantidad de luz recibida
Iluminación operación ambiental	3000 lx o menos (luz incandescente)	
Temperatura ambiente	En servicio: 0 a 50°C	
	Almacenamiento: -15 a 60°C (sin formación de hielo ni condensación)	
Humedad ambiente	En servicio y almacenamiento: 35 % a 85 % (sin condensación)	
Grado de protección	Longitud del cable 0,5 m: IP66, longitud del cable 2 m: IP67	
Materiales	Carcasa: Aluminio presofundido; cubierta frontal: cristal	
Longitud del cable	0.5 m, 2 m	
Peso	Aprox. 350g	

3.1.1.2 Máquina de fisuración por resonancia

Con el fin de conseguir ejes fisurados se dispone de un dispositivo experimental para la fisuración por resonancia (ver figura 3.51). Este dispositivo permite someter cualquier pieza, mediante un excitador electrodinámico, a una frecuencia de vibración cercana a su frecuencia natural, de manera que cuando la fisura se propaga la frecuencia natural del sistema disminuye. Esto permite controlar la fisuración y detener el proceso cuando se alcance la frecuencia de vibración predeterminada.

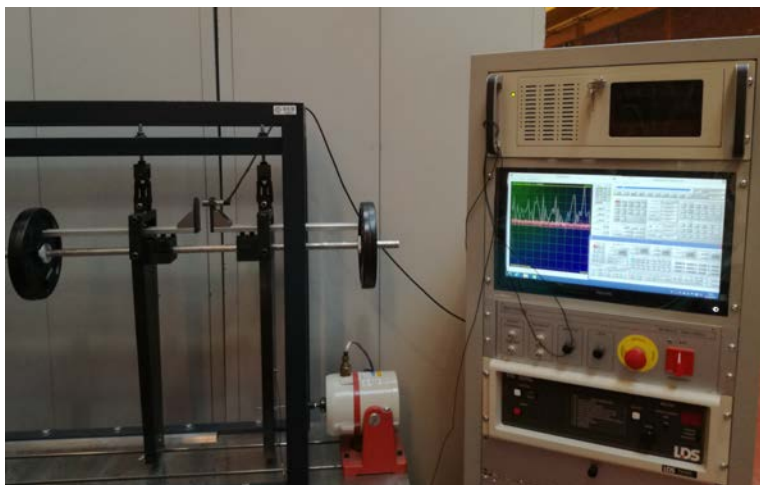


Figura 3.51: Máquina de fisuración por resonancia.

Los elementos principales de este dispositivo son:

- Un marco de carga compuesto por un bastidor cerrado sujeto por una banda inferior y los brazos del diapasón.
- Un actuador eléctrico que hace oscilar los brazos del diapasón y está dotado de dos acelerómetros y un sensor de proximidad para la medida de desplazamientos.
- Masas que se acoplan al eje y que impiden unas vibraciones sobreexcitadas.
- Doble sistema de control y adquisición de datos.

En la figura 3.52 se muestra con más detalle la disposición del eje en la máquina de fisuración por resonancia. En esta se detallan los componentes descritos anteriormente.

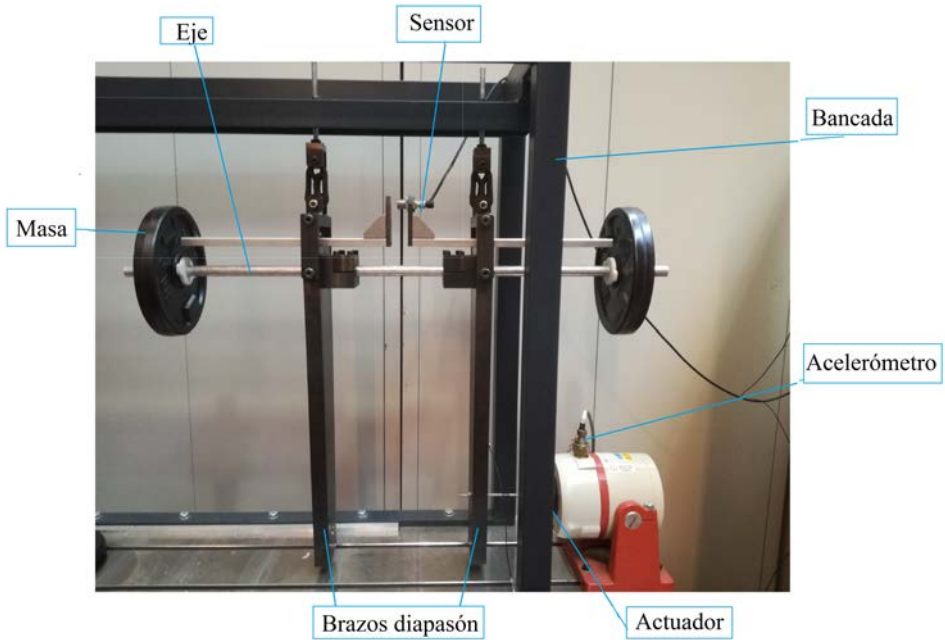


Figura 3.52: Disposición del eje en la máquina de fisuración por resonancia.

La cadena de medida de este dispositivo está compuesta por el sensor de proximidad y los acelerómetros (ver figuras 3.53 3.54), el acondicionador de señal y el ordenador donde a través del software instalado es posible visualizar, guardar y realizar el procesamiento de los datos obtenidos del ensayo.

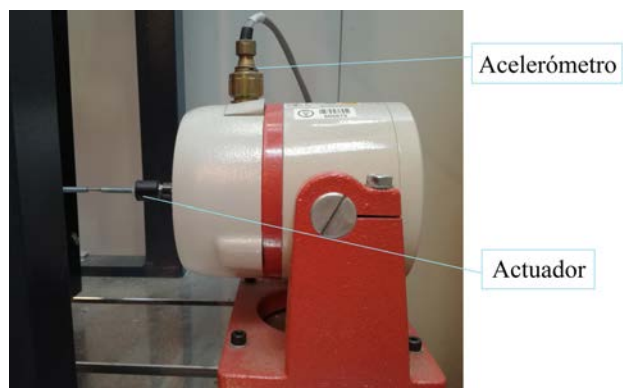


Figura 3.53: Actuador eléctrico y acelerómetro.

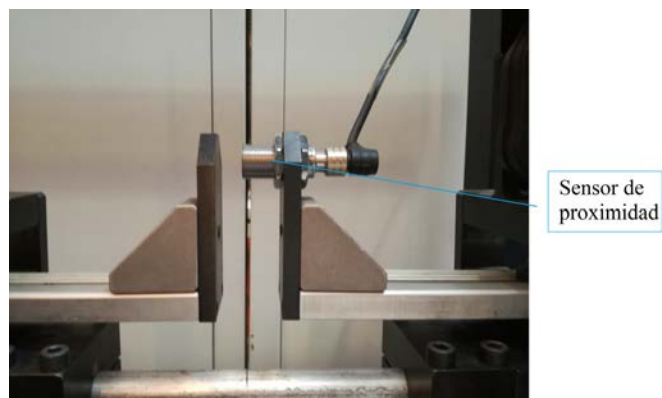


Figura 3.54: Sensor de proximidad magnética.

El sensor utilizado en este equipo para la medida de la posición es de proximidad electromagnética. Este tipo de sensores generan un campo magnético y detectan las pérdidas de corriente de dicho campo al introducirse en él los objetos de detección. En concreto, el sensor utilizado es de la marca CONTRINEX, tipo DW-AS-509-M19-320. En la tabla 3.3, se resumen sus características.

Tabla 3.3: Características sensor *DW-AS-509-M19-320*.

Rango de detección	0 a 10 mm
Precisión de repetibilidad	0.3 mm
Rango de voltaje de la fuente de alimentación	15 a 30 VDC
Voltaje de salida	10V/±0.4V (23°C)
Intensidad de salida	20mA/±0.8mA (23°C)
Ancho de banda	500 Hz
Rango de temperatura ambiente	25 a 70°C
Peso (cable/conector)	110/ 50g
Grado de protección	IP67

El acelerómetro es de tipo piezoeléctrico con electrónica integral y alta resolución que permite una excelente relación señal-ruido. Este es de la marca Bruel & Kjoer, del tipo 4519-001, cuyas especificaciones se indican en la tabla 3.4.

Tabla 3.4: Características acelerómetro 4519-001.

	Unidades	4519-001
Características Dinámicas		
Sensibilidad	mV/g	100±10 %
Rango de medida	g	±50
Frecuencia de resonancia	kHz	45
Amplitud de respuesta ±10 %	Hz	0.5 a 20000
Ruido residual	mg	0.9
Características Eléctricas		
Impedancia de salida	Ω	<100
Voltaje de salida	V	12±1
Rango de intensidad de la fuente de alimentación	mA	2 a 20
Tiempo de puesta en marcha	s	<1
Características Medio Ambiente		
Rango de temperatura	°C	-51 a 100
Humedad		sellado herméticamente
Pulso	g pk	5000
Sensibilidad térmica	% °C	0.2
Características Físicas		
Peso	g	1.6
Material		Titanio
Conector		M3

3.1.1.3 Video-microscopio de medición 2D Swift Duo

Se dispone también de un sistema óptico de aumentos (Video-microscopio de medición 2D SwiftDuo) para la medida de las profundidades de las fisuras una vez realizados los ensayos y producida la rotura delos ejes (ver figura 3.55). Este sistema permite la medición en dos ejes (direcciones x e y) y tiene una resolución de lectura de 0.001 mm. El dispositivo consta de:

- Una mesa de coordenadas XY con capacidad de 150x100 mm.
- Mandos de enfoque con desplazamiento de aproximación y desplazamiento fino.
- Iluminación regulable mediante anillo de luz 8 puntos de LED.
- Lentes de 20x y 50x.

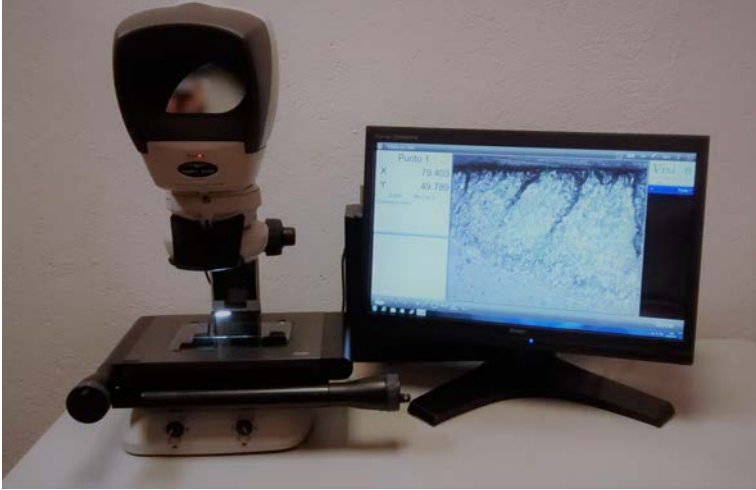


Figura 3.55: Video-microscopio de medición 2D Swift Duo.

3.1.2 Metodología de ensayos

Se han llevado a cabo ensayos hasta rotura en ejes previamente entallados y fisurados. En la sección central de los ejes se han realizado entallas, cuyas profundidades varían desde 2 mm hasta 6 mm. El ancho de dichas entallas es de 0.4 mm. En la figura 3.56 se muestra un detalle de la zona de la entalla de uno de los ejes ensayados. El ensayo consiste en colocar en el dispositivo experimental el eje fisurado con un disco y una masa excéntrica, según se muestra en la figura 3.57.



Figura 3.56: Detalle de la zona de la entalla de uno de los ejes ensayados

Los ejes analizados tienen una longitud de $L = 900\text{mm}$ y diámetro $D = 20\text{mm}$. Son de aluminio con un Módulo de Young de $E = 75\text{GPa}$, densidad

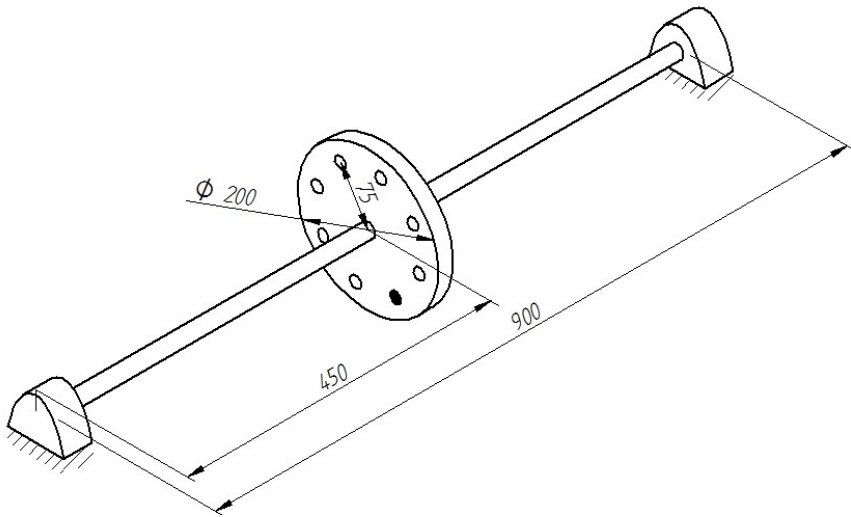


Figura 3.57: Disposición del eje.

$\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0.33$.

El disco, que se sitúa en una posición muy próxima a la sección fisurada, tiene un diámetro de $d = 200 \text{ mm}$, un espesor de $e_d = 21 \text{ mm}$ y una masa de $m_d = 5 \text{ kg}$. Dicho disco es de acero con un Módulo de Young de $E = 210 \text{ GPa}$, densidad $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$.

La masa excéntrica que se coloca en las ranuras practicadas en el disco tiene un valor de $m_e = 0.2 \text{ kg}$ y está situada a una distancia del centro del disco de $e = 75 \text{ mm}$.

El diseño del disco permite variar la orientación de la masa excéntrica respecto de la posición de la fisura. Las orientaciones de excentricidad se han tomado en relación a la entalla, siendo los ángulos estudiados en esta Tesis los siguientes: $\theta = 0^\circ$, 45° y 90° , como se representa en la figura 3.58.

En cuanto a la velocidad de giro, se han realizado ensayos variándola desde el reposo hasta las velocidades permitidas por el dispositivo de seguridad de la máquina, generalmente velocidades ligeramente inferiores a la crítica alrededor de 1000 rpm.

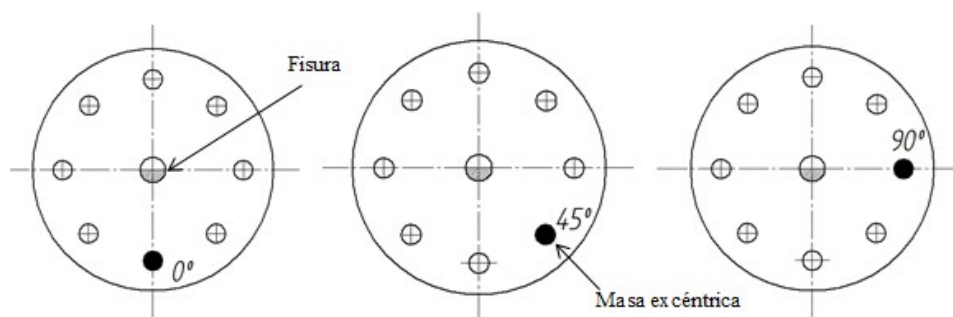


Figura 3.58: Orientaciones de la masa excéntrica en relación con la entalla estudiadas experimentalmente.

3.1.3 Ensayos realizados

Se han realizado dos tipos de ensayos. En primer lugar, se han montado en el banco de ensayos ejes entallados y se han sometido al giro a velocidades controladas hasta la fisuración y rotura por propagación. Estos primeros ensayos permitieron la puesta en servicio de la máquina para la realización de la parte experimental de esta Tesis. De ellos se obtuvieron datos como el rango de velocidad de los ensayos, el procedimiento más adecuado para la determinación de los armónicos o la identificación de los lazos de las órbitas. Se ensayaron 12 ejes entallados con profundidades relativas de entalla de 0.3 ;0.4 ;0.45 y 0.5 y posición de la masa excéntrica de 0° , 45° y 90° .

En el segundo tipo de ensayos se montaron ejes fisurados. Los ejes fueron fisurados previamente por resonancia, en la máquina específica para ello, partiendo de entallas de 0.2 y 0.3; y con profundidades de fisura, incluidas las entallas, de valores 0.350; 0.375; 0.545; 0.550.

3.2 RESULTADOS EXPERIMENTALES

Se procede a realizar, como primer paso en el desarrollo experimental de esta Tesis, un análisis de los datos obtenidos en los ensayos realizados. A partir de los desplazamientos medidos con los sensores láser se han representado las órbitas y los espectros de frecuencias. Las órbitas representan los desplazamientos verticales frente a los horizontales del centro geométrico de la sección media del eje medidos sobre la cara exterior del disco. Como un análisis exclusivo de las órbi-

tas no aporta la suficiente información para poder interpretar el tipo de defecto se recurre a la Transformada Rápida de Fourier (FFT) de los desplazamientos verticales, que permite conocer de manera más precisa la dinámica del eje durante el ensayo y el tipo de defecto presente.

Dado que a medida que avanza el ensayo de cada eje, la fisura puede ir propagándose, resulta interesante conocer los valores de las velocidades críticas (ω_c), o sus armónicos, del eje en cada momento. Para ello, se debe realizar un barrido de velocidades muy fino en las velocidades de giro subcríticas próximas a $\frac{1}{2}\omega_c$, $\frac{1}{3}\omega_c$ y $\frac{1}{4}\omega_c$. En este capítulo se desarrolla un método que permite estimar, a partir del análisis de la FFT, el valor de dicha velocidad crítica.

3.2.1 *Determinación de la presencia de una fisura*

En este apartado se indican los aspectos que son comunes a todos los ensayos y que por tanto, son característicos del sistema eje fisurado analizado en esta Tesis, independientemente de la profundidad de fisura y de la orientación de la excentricidad.

En la figura 3.59 se representan las órbitas adimensionales obtenidas a partir de los desplazamientos de la sección fisurada del eje para diferentes relaciones de velocidades p , siendo esta el cociente entre la velocidad de giro y la velocidad crítica del rotor intacto. Los resultados se corresponden con el caso de un eje con tamaño de fisura $\alpha = 0.375$ y $\theta = 0^\circ$. Debido a que en cada ensayo se obtienen datos de un gran número de velocidades de giro, en esta figura se muestran solo aquellas que son más representativas.

Del mismo modo y para el mismo caso indicado, en la figura 3.60 se representan los espectros de frecuencias obtenidos mediante la aplicación de la FFT.

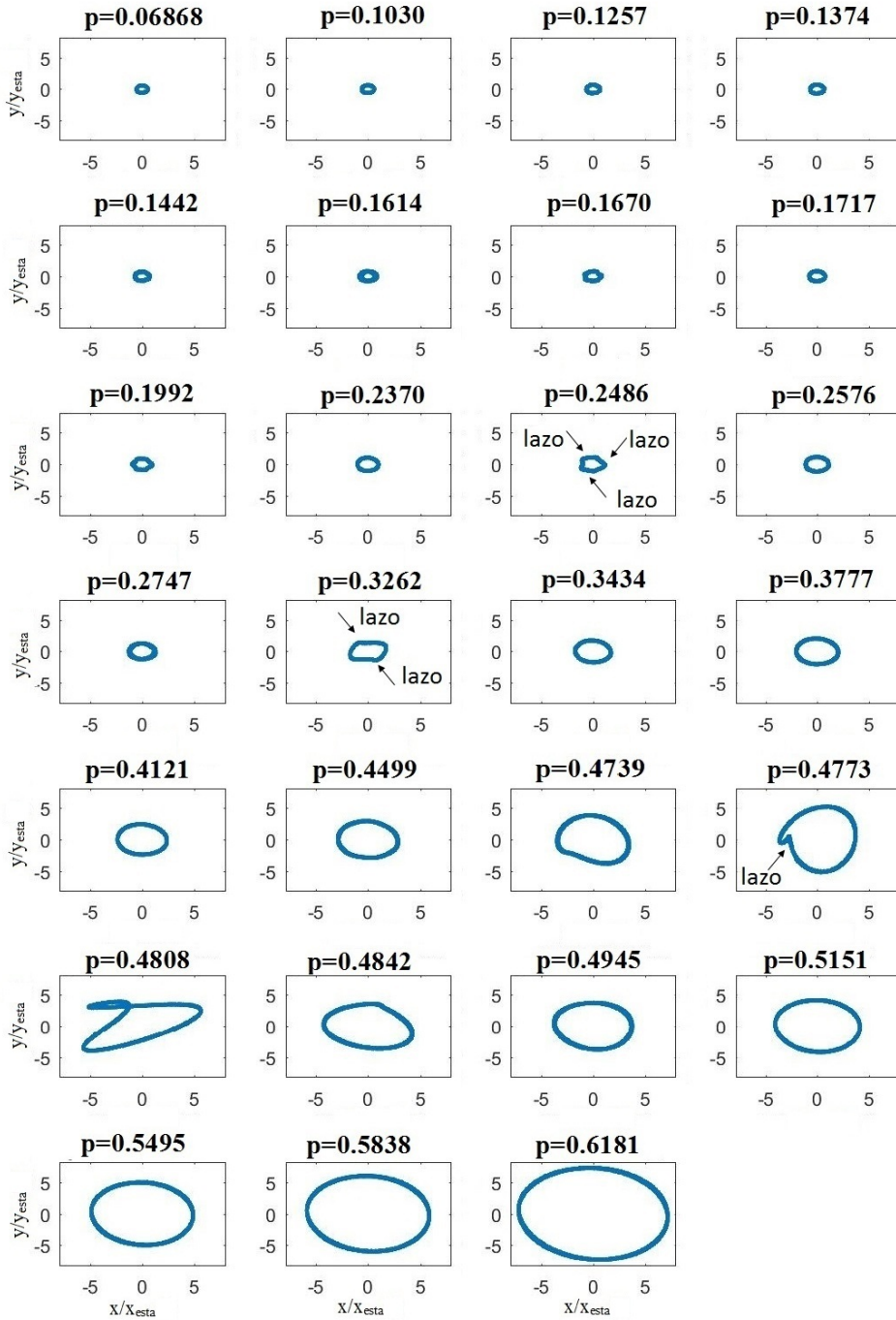


Figura 3.59: Barrido de velocidades. Órbitas para el caso $\alpha = 0.375$ y $\theta = 0^\circ$.

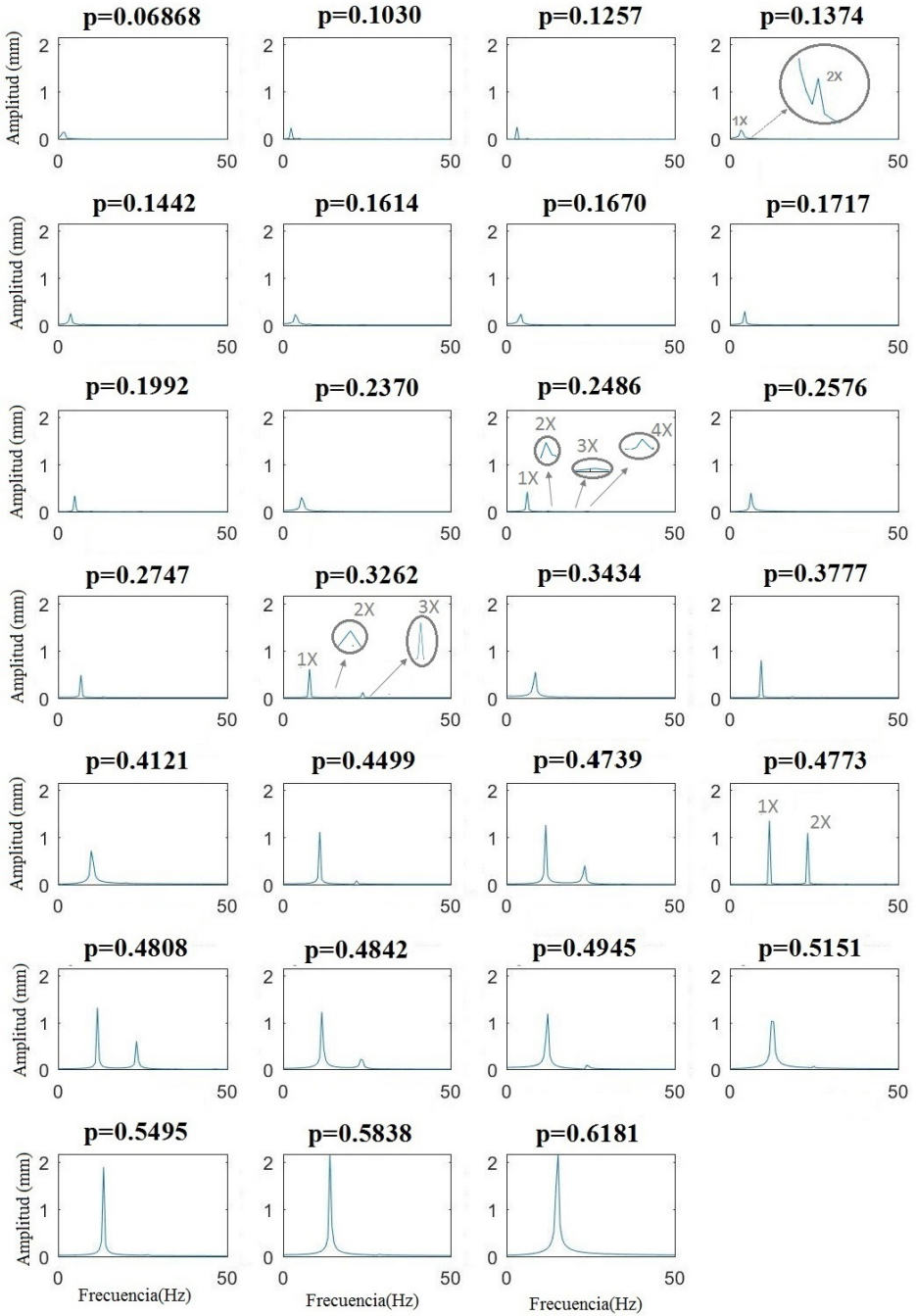


Figura 3.60: Barrido de velocidades. FFT para el caso $\alpha = 0.375$ y $\theta = 0^\circ$.

De acuerdo con lo indicado en el capítulo de 2, una fisura produce una anisotropía en el rotor que es detectada cuando en el barrido de velocidades se

presentan órbitas tipo *backward* o cuando aparece una zona de transición característica en la que la órbita adquiere la forma de un "ocho". En todos los ensayos realizados se han observado órbitas tipo *forward* y no se han observado órbitas tipo *backward*, pero sí se observa la zona de transición característica (ver figura 3.59) a una velocidad $p = 0.4808$, con lo que se puede concluir que los ejes ensayados presentan un tipo de anisotropía.

En cuanto a la forma de las órbitas, se puede ver como la mayoría presenta una forma elíptica consecuencia del desequilibrio impuesto (por ejemplo $p = 0.5495$). En concordancia con lo explicado en el Capítulo 2, la forma de la órbita de un eje fisurado cambia en el rango de velocidades en torno a la velocidad crítica o sus múltiplos o submúltiplos, pudiendo aparecer uno o varios lazos interiores o exteriores, según el valor de la velocidad de giro y el sentido de giro de la órbita. En la figura 3.61 se observan lazos interiores consecuencia del giro *forward* para dos velocidades de giro $p = 0.3056$ y $p = 0.4533$. La aparición o no y el tamaño de los lazos interiores, también vendrá determinada por la profundidad de fisura como se verá más adelante en el estudio de la influencia de este parámetro. La aparición de los lazos interiores también está relacionada con las señales que contienen más de una componente de vibración (armónico) [16] y [34] como se puede observar de la correlación de las figuras 3.59 y 3.60. Como ejemplo en $p = 0.4773 (\approx \frac{1}{2}\omega_c)$, se observa un pequeño lazo en la órbita y dos picos en el espectro de frecuencias. En el caso de $p = 0.3262 (\approx \frac{1}{3}\omega_c)$ se observan dos lazos incipientes en la órbita y tres picos en el espectro de frecuencias y en el caso de $p = 0.2486 (\approx \frac{1}{4}\omega_c)$ se observa el inicio de tres lazos y cuatro componentes en el espectro de frecuencias.

En la figura 3.60, se puede ver que en el caso de que la velocidad de giro no sea próxima a $\frac{1}{n}\omega_c$, por ejemplo $p = 0.1374$ la componente 1X tendrá una amplitud (A_1) mucho mayor que la amplitud de la componente 2X (A_2). A medida que la velocidad de giro se acerca a $\frac{1}{n}\omega_c$, el número de frecuencias que predomina en el espectro se ve incrementado hasta n , donde n es el número de armónicos por los que está formada la señal, y además la diferencia entre las amplitudes A_1 y A_n disminuye como se puede ver en $p = 0.4739$, $p = 0.4773$ y $p = 0.4808$, donde aparecen dos armónicos por ser velocidades cercanas a $\frac{1}{2}\omega_c$ y la diferencia de amplitudes es menor para el caso $p = 0.4773$ por ser esa velocidad más próxima a $\frac{1}{2}\omega_c$. Si la velocidad de giro Ω es $\frac{1}{3}\omega_c$, en el espectro predominarán tres componentes de vibración: 1X, 2X y 3X (ver $p = 0.3262$ de la figura 3.60). Estas componentes coinciden con la velocidad de giro Ω (1X), dos veces la velocidad de giro 2Ω (2X) y tres veces la velocidad de giro 3Ω (3X), respectivamente. Del

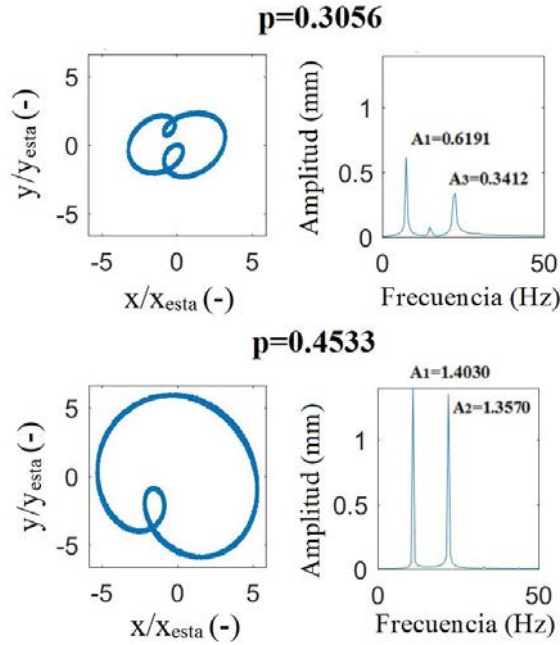


Figura 3.61: Lazos interiores consecuencia del giro *forward* para $\alpha > 0.5$. $p = 0.3056$ y $p = 0.4533$.

mismo modo, si la velocidad de giro es $\frac{1}{4}\omega_c$, en el espectro predominarán cuatro componentes de vibración: $1X$, $2X$, $3X$ y $4X$ (ver $p = 0.2486$), donde $1X$ coincide con la velocidad de giro, $2X$ con dos veces la velocidad de giro 2Ω y $3X$ con tres veces la velocidad de giro 3Ω y $4X$ con cuatro veces la velocidad de giro 4Ω .

Analizando las FFT para todas las velocidades de giro, se observa que, en concordancia con lo explicado en 2.1.3, cuando el rotor presenta una fisura, en el espectro de frecuencia de cualquier velocidad de giro, por ejemplo $p = 0.1374$, aparecen dos componentes de vibración ($1X$ y $2X$), (en ocasiones no observable la más pequeña por la gran diferencia de amplitudes). Esto puede verse mejor en la figura 3.62, donde se representan las FFT obtenidas a partir de resultados experimentales, para una velocidad de giro $p = 0.3503$, (que no se corresponde con ningún armónico) para un eje fisurado ($\alpha = 0.375$) y otro sin fisurar.

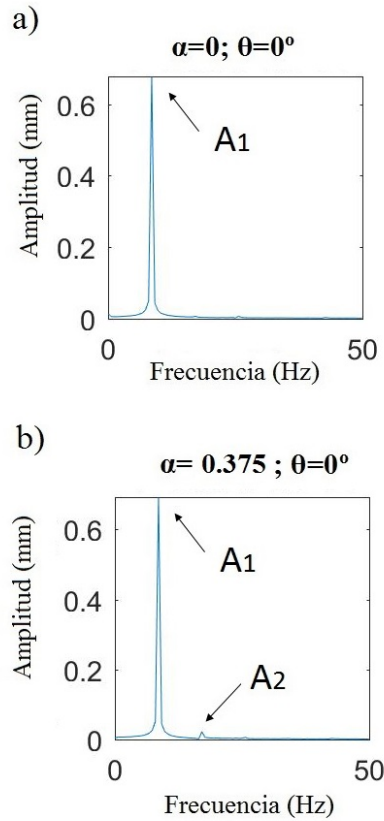


Figura 3.62: FFT $p=0.3503$ y $\theta=0^\circ$. a) Sin fisura, b) Con fisura de $\alpha=0.375$.

3.2.2 Identificación de la fisura

Como es sabido, la existencia de una fisura en un componente mecánico hace disminuir la frecuencia natural del mismo. En el caso de los ejes, esta frecuencia natural coincide con la velocidad crítica. En este apartado se desarrolla un procedimiento para calcular la velocidad crítica del rotor en cada momento del ensayo a partir de los datos experimentales y así poder identificar la fisura contenida en él.

3.2.2.1 Cálculo de la velocidad crítica a partir de los datos experimentales

Hasta ahora, los resultados publicados por otros autores relacionados con la detección de fisuras, se corresponden con velocidades próximas, no siempre exactas, a la velocidad crítica, a $\frac{1}{n}\omega_c$ o $n\omega_c$. Sin embargo, con el fin de identificar

la fisura y su posible propagación es necesario conocer con mayor precisión la velocidad crítica o sus armónicos por lo que es necesario realizar un barrido de velocidades más fino en la zona próxima a la velocidad crítica, ya que aportará mayor información y ayudará a su determinación.

Aunque las órbitas proporcionan una valiosa información sobre la presencia de las fisuras, son las amplitudes de los espectros de frecuencias los que de manera más eficiente pueden servir para la determinación en cada caso de la velocidad crítica.

En esta Tesis Doctoral se presenta un procedimiento para determinar la velocidad crítica utilizando la amplitud de los armónicos o, más concretamente, su cociente, ya que los desplazamientos se ven afectados de forma directa por esta relación, como se observa en la expresión 2.5.

Como ejemplo de procedimiento de estimación, en las figuras 3.63 y 3.64 se muestran las órbitas y el espectro de frecuencias para el caso $\alpha = 0.375$ y $\theta = 0^\circ$ en velocidades cercanas a $\frac{1}{2}\omega_c$. En ella se indican los valores de las amplitudes A_1 y A_2 . En la tabla 3.5 se muestran, los resultados obtenidos para el cociente $\frac{A_1}{A_2}$.

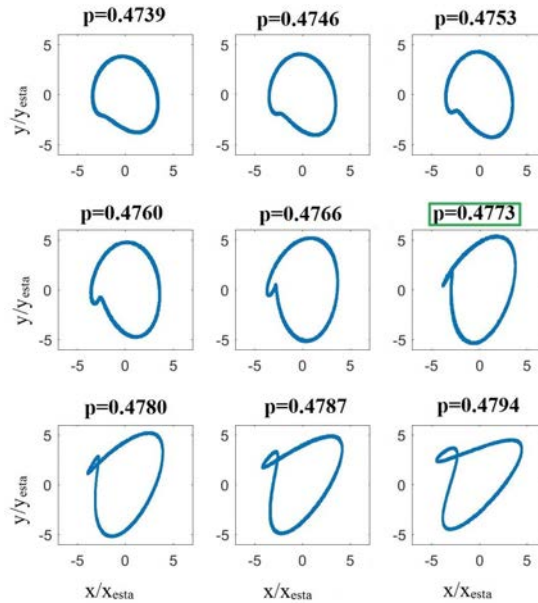


Figura 3.63: Órbitas para $\alpha = 0.375$ y $\theta = 0^\circ$ en velocidades cercanas a $\frac{1}{2}\omega_c$.

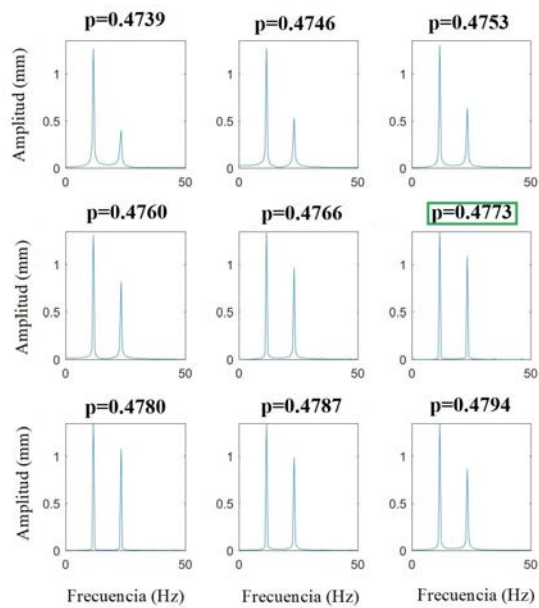


Figura 3.64: FFT para $\alpha = 0.375$ y $\theta = 0^\circ$ en velocidades cercanas a $\frac{1}{2}\omega_c$.

Tabla 3.5: Cociente de amplitudes en el entorno de $\frac{1}{2}\omega_c$ para $\alpha = 0.375$ y $\theta = 0^\circ$.

p	$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$
0.4739	3.1644
0.4746	2.4090
0.4753	2.0545
0.4760	1.6100
0.4766	1.3867
0.4773	1.2409
0.4780	1.2529
0.4787	1.3597
0.4794	1.5502

De la correlación de las figuras 3.63 y 3.64 se observa que el cociente $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$ disminuye a medida que la velocidad de giro del eje se acerca a $\frac{1}{2}$, siendo el menor de todos el correspondiente a $\frac{1}{2}\omega_c$, ya que por observación de las órbitas, en dicha velocidad la forma y el tamaño de la órbita es mayor y por tanto se alcanza la resonancia.

De esta forma, a partir del valor mínimo del cociente $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$ se obtiene que $p = 0.4773$ es el valor correspondiente a $\frac{1}{2}\omega_c$ del eje fisurado con un tamaño de fisura $\alpha = 0.375$, y por tanto, la velocidad crítica es $p_c = 0.9546$.

También se ha observado esta tendencia en resultados de otros autores como por ejemplo los de Guo et al. en [64], como se muestra en la tabla 3.6. Estos resultados se corresponden con una profundidad de fisura $\alpha = 0.005$ en el rango de velocidades de $\frac{1}{2}\omega_c$.

Tabla 3.6: Cociente de amplitudes en el entorno de $\frac{1}{2}\omega_c$ para $\alpha = 0.005$ de los resultados obtenidos en [64].

p	$\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2}$
0.4709	3.6156
0.4745	2.6753
0.4765	2.2247
0.4782	1.9267
0.4797	1.8299
0.4803	1.8463
0.4813	1.9196
0.4830	2.2262
0.4847	2.6933
0.4884	4.0570

En este caso, $p = 0.4797$ es el valor correspondiente a $\frac{1}{2}\omega_c$ del eje fisurado con un tamaño de fisura $\alpha = 0.005$, y por tanto, la velocidad crítica es $p_c = 0.9594$.

Se han obtenido las mismas conclusiones para $\frac{1}{3}\omega_c$ y $\frac{1}{4}\omega_c$ y los cocientes $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_3}$ y $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_4}$, respectivamente, por lo que con este procedimiento, se puede determinar ω_c a partir del valor mínimo del cociente $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_n}$.

Otra forma de determinar la velocidad crítica es visualizando las órbitas instantáneas durante un barrido de velocidades. La presencia de lazos indica que la velocidad de giro, en ese instante, es cercana a $\frac{1}{n}\omega_c$. El número de lazos contenidos en la órbita tiene relación con el armónico correspondiente tal y como propone [16]. Estos autores indican que en velocidades cercanas a $\frac{1}{2}\omega_c$, cuando $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} \leq 2$ se pierde la forma elíptica de la órbita y aparece un lazo interior (ver

figuras 3.63 y 3.64 en $p = 0.4739$ y $p = 0.4760$)

En el desarrollo de esta Tesis Doctoral, se han obtenido las mismas conclusiones para $\frac{1}{2}\omega_c$. Además, se ha comprobado que para $\frac{1}{3}\omega_c$, cuando $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_3} \leq 3$, aparecen dos lazos interiores en la órbita. Por ejemplo, para el caso $\alpha = 0.5$ y $\theta = 0$ (ver figura 3.61) para $p \approx \frac{1}{3}$ ($p = 0.3056$) el cociente de amplitudes $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_3} = 1.81 \leq 3$ lo que indica que en la órbita aparecerán 2 lazos, como se puede comprobar en la figura 3.61. Si se considera $p \approx \frac{1}{2}$ ($p = 0.4533$), $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_2} = 1.03 \leq 2$ con lo que la órbita presenta 1 lazo.

Por tanto, haciendo extensivo este razonamiento para todas las velocidades de giro y escribiendo de forma general, se tiene que en $\frac{1}{n}\omega_c$:

- Cuando $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_n} \leq n$ la órbita presentará $n - 1$ lazos interiores.
- Cuando $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_n} > n$ la órbita tenderá a ser una elipse sin ningún lazo interior.

Como conclusión, la velocidad crítica se puede obtener de dos modos distintos utilizando resultados experimentales:

- Si las órbitas presentan $n - 1$ lazos interiores, en el espectro de frecuencias predominarán n frecuencias, y por lo tanto, la velocidad de giro alcanzada es próxima a $\frac{1}{n}\omega_c$.
- Cuando el cociente $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_n}$ alcanza un mínimo en las proximidades de $\frac{1}{n}\omega_c$, la velocidad de giro es $\frac{1}{n}\omega_c$.

3.2.3 *Discusión de resultados*

Se presentan en este apartado los resultados correspondientes a los ensayos realizados con ejes fisurados con distintas profundidades de fisura, distintas orientaciones de la masa excéntrica y a diferentes velocidades de giro. Los resultados que se analizan son desplazamientos en forma de órbitas y los espectros de frecuencias. El objetivo final será establecer relaciones entre el tamaño de la fisura y la velocidad crítica.

Para el estudio de la influencia de la profundidad de la fisura en el comportamiento dinámico de un eje fisurado rotatorio, se han ensayado un eje intacto, y ejes con diferentes profundidades relativas de fisura $\alpha = 0.350, 0.375, 0.545$ y 0.550 . La posición de la masa excéntrica en todos estos ensayos es de $\theta = 0^\circ$.

3.2.3.1 Estudio de la profundidad de la fisura inicial

En este apartado, se analizan los resultados obtenidos al inicio de los ensayos, es decir, cuando aún no se ha producido la propagación de la fisura durante el ensayo. Los ensayos se realizan variando la velocidad de giro desde el reposo hasta las velocidades de seguridad del banco (en este caso, velocidades ligeramente inferiores a la crítica) siendo de especial interés aquellas velocidades que coinciden con los armónicos $\Omega = \frac{1}{n} \omega_c$.

Una vez realizado el barrido de velocidades en los ejes que son objeto de estudio, se calcula la velocidad crítica a partir de los resultados experimentales, tal y como se indicó en el cálculo de la velocidad crítica. En las figuras 3.65 a 3.69 se muestran el espectro de frecuencias en velocidades cercanas a $\frac{1}{3} \omega_c$ para los casos indicados. En todos ellos la orientación de la masa excéntrica es $\theta = 0^\circ$. En cada uno de los espectros se indican los valores de las amplitudes A_1 y A_3 que han sido tomadas para el cálculo del cociente $\frac{A_1}{A_3}$. En todas ellas se recuadra en verde aquella velocidad en la que el cociente es mínimo.

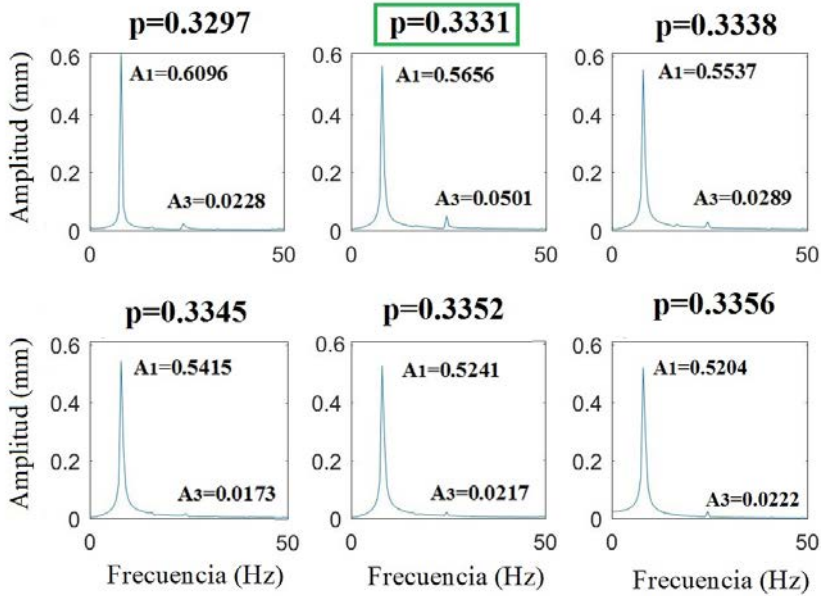


Figura 3.65: FFT para un eje intacto y $\theta = 0^\circ$ en velocidades cercanas a $\frac{1}{3} \omega_c$.

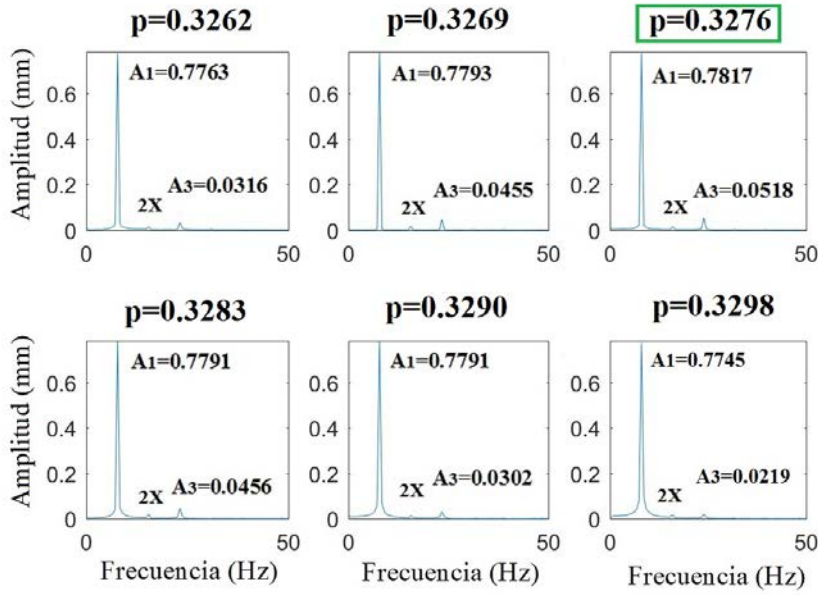


Figura 3.66: FFT para $\alpha = 0.350$ y $\theta = 0^\circ$ en velocidades cercanas a $\frac{1}{3}\omega_c$.

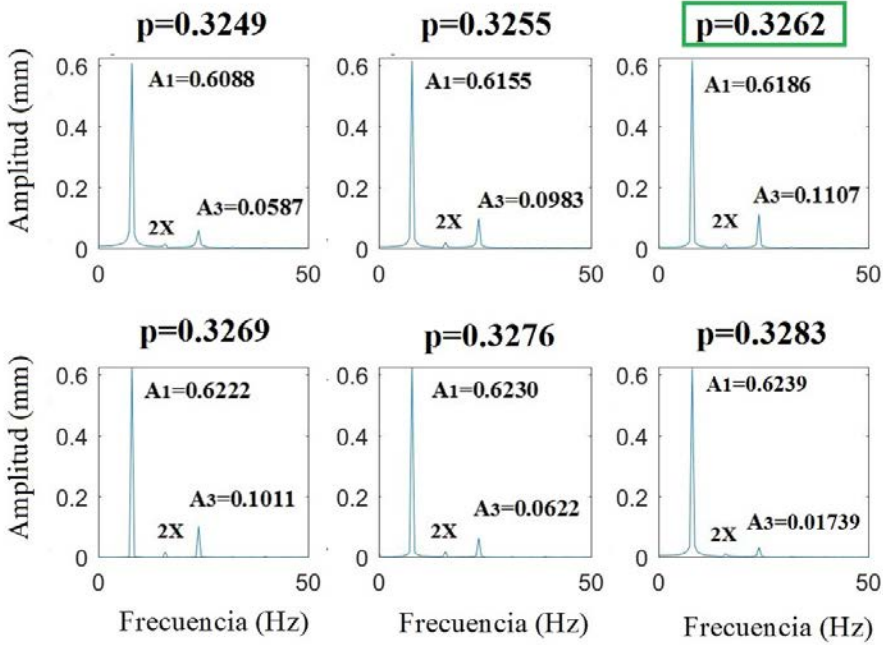


Figura 3.67: FFT para $\alpha = 0.375$ y $\theta = 0^\circ$ en velocidades cercanas a $\frac{1}{3}\omega_c$.

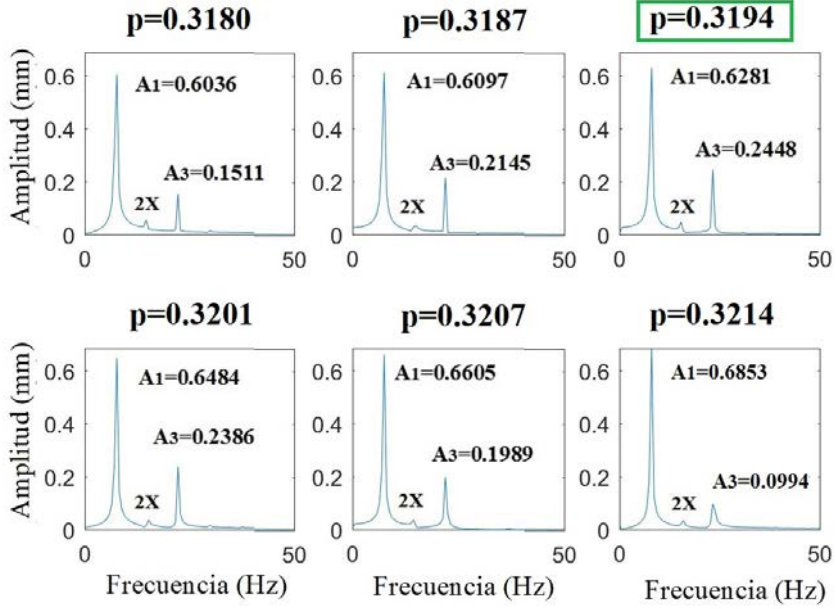


Figura 3.68: FFT para $\alpha = 0.545$ y $\theta = 0^\circ$ en velocidades cercanas a $\frac{1}{3}\omega_c$.

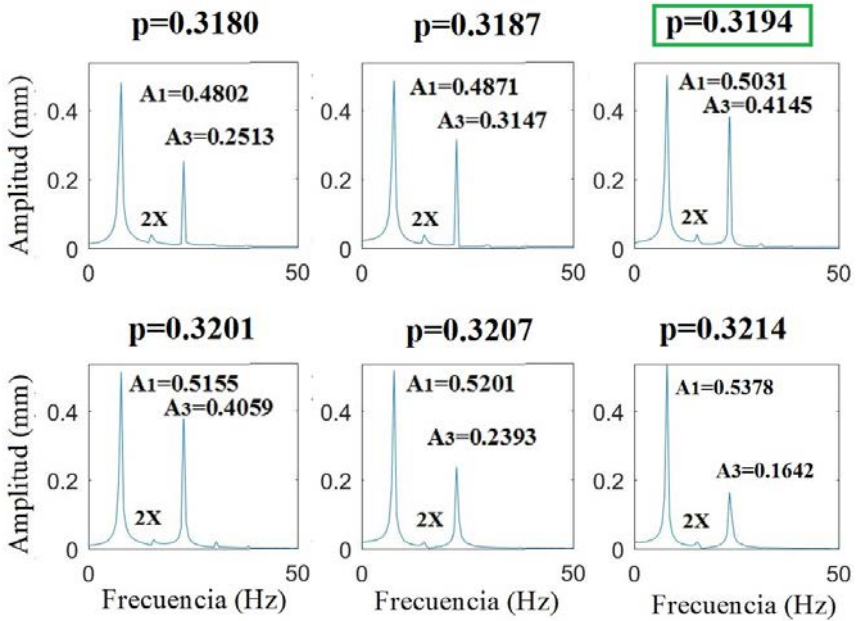


Figura 3.69: FFT para $\alpha = 0.550$ y $\theta = 0^\circ$ en velocidades cercanas a $\frac{1}{3}\omega_c$.

En la tabla 3.7, se muestran los valores las velocidades de giro del barrido en las proximidades de $\frac{1}{3}\omega_c$ y el valor de los cocientes $\frac{A_1}{A_3}$. En ella se resaltan aquellos valores en los que el cociente $\frac{A_1}{A_3}$ es mínimo, ya que son los correspondientes al valor más próximo a $\frac{1}{3}\omega_c$, y por tanto, con los que se calcula el valor de la velocidad crítica.

Tabla 3.7: Cálculo velocidad crítica para las distintas profundidades de fisura.

Intacto	$\alpha = 0.350$		$\alpha = 0.375$		$\alpha = 0.545$		$\alpha = 0.550$	
	$\frac{A_1}{A_3}$	p	$\frac{A_1}{A_3}$	p	$\frac{A_1}{A_3}$	p	$\frac{A_1}{A_3}$	p
0.3297	26.7368	0.3262	24.5665	0.3249	10.3626	0.3180	3.9947	0.3180
0.3331	11.2894	0.3269	17.1275	0.3255	6.2614	0.3187	2.8424	0.3187
0.3338	19.1592	0.3276	15.0907	0.3262	5.5881	0.3194	2.5658	0.3194
0.3345	31.3006	0.3283	17.0855	0.3269	6.1543	0.3201	2.7175	0.3201
0.3352	24.1521	0.3290	25.7980	0.3276	10.0161	0.3207	3.3208	0.3207
0.3356	23.4414	0.3298	35.3652	0.3283	35.8769	0.3214	6.8971	0.3214

En la tabla 3.8 se resumen los valores de las velocidades críticas obtenidos para cada profundidad de fisura a partir de los cocientes $\frac{A_1}{A_3}$. Además, se muestran los valores de los cocientes $\frac{A_1}{A_2}$, $\frac{A_1}{A_3}$ y $\frac{A_1}{A_4}$ con los que se han obtenido las velocidades subcríticas respectivamente siguiendo el mismo procedimiento. Se puede observar como a medida que aumenta la profundidad de fisura, el valor de la velocidad crítica disminuye y además disminuye el cociente $\frac{A_1}{A_n}$ para todas las velocidades de giro.

Tabla 3.8: $\frac{A_1}{A_n}$ según α .

α	p_c	$\frac{A_1}{A_2}$	$\frac{A_1}{A_3}$	$\frac{A_1}{A_4}$
Intacto	1	7.6845	11.2984	40.3709
0.350	0.9828	2.0920	15.0878	38.1504
0.375	0.9786	1.2409	5.5881	37.0220
0.545	0.9582	0.9507	2.5658	20.4841
0.550	0.9582	0.8680	1.2138	3.9794

Por tanto, se concluye que con el procedimiento mostrado, a partir del cociente $\frac{A_1}{A_n}$ de las amplitudes obtenidas del espectro de frecuencias se puede determinar $\frac{1}{n}\omega_c$ y por tanto, calcular la velocidad crítica, constituyendo esta una de las aportaciones de la Tesis Doctoral.

Un vez determinada la velocidad crítica, se muestran los resultados experimentales obtenidos en $\frac{1}{4}\omega_c$, $\frac{1}{3}\omega_c$ y $\frac{1}{2}\omega_c$. De todo el barrido de velocidades se han escogido estas por ser las que aportan mayor información sobre la presencia de la fisura.

En la figura 3.70 se pueden ver los resultados para $\frac{1}{4}\omega_c$, donde se representan la órbita (izquierda) y el espectro de frecuencia (derecha), para las distintas profundidades de fisura analizadas eje intacto, $\alpha = 0.350, 0.375, 0.545$ y 0.550 .

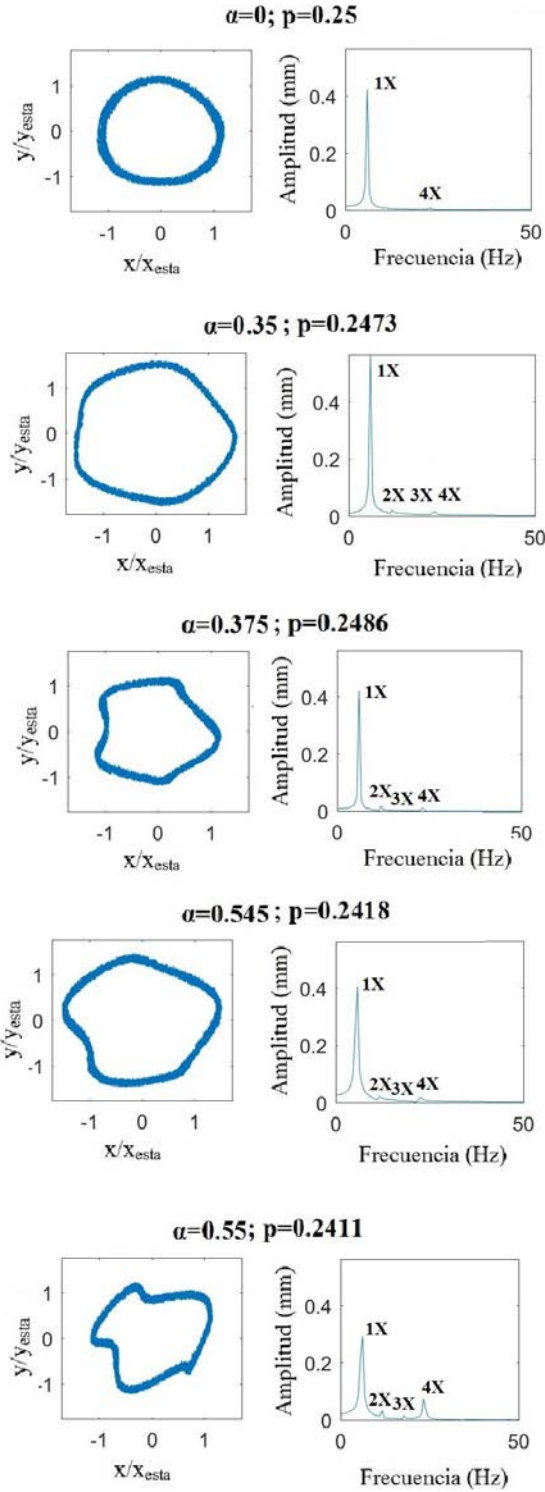


Figura 3.70: Órbitas en $\frac{1}{4}\omega_c$ casos: Sin fisura, $\alpha = 0.350, 0.375, 0.545$ y 0.550 .

De la comparación entre las órbitas de un eje intacto y las de los ejes fisurados, se deduce que la órbita del eje intacto tiene una forma regular y elíptica mientras que las de los ejes fisurados presentan formas no elípticas que tienden a presentar lazos.

El número de lazos en la órbita de un eje fisurado coincide con lo ya explicado en 2.2.2. Es decir, cuando el eje gira a una velocidad $\frac{1}{n}\omega_c$, la órbita presentará $n - 1$ lazos interiores. En este caso $\frac{1}{4}\omega_c$ es una velocidad subcrítica en la que es difícil ver estos fenómenos, llegándose a formar un pequeño lazo en $\alpha = 0.550$ y observándose dos lazos incipientes más.

Sin embargo, en el espectro de frecuencias se observa que en $\frac{1}{4}\omega_c$, el número de armónicos es cuatro, como se explicó en el apartado 2.1.3, siendo más visibles a medida que el tamaño de la fisura aumenta. En el caso de un eje intacto que gira a $\Omega = \frac{1}{4}\omega_c$, se presentan únicamente dos armónicos, $1X$ y $4X$, correspondientes a la velocidad de giro y la velocidad crítica respectivamente.

Por último, analizando los valores de los cocientes resumidos en la tabla 3.8 se observa que cuando el valor de $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_4} \leq 4$, (en $\alpha = 0.550$; $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_4} = 3.9794$) la órbita presenta tres lazos interiores. En este caso $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_4} \approx 4$, por lo que los lazos son casi inapreciables.

En la figura 3.71 se pueden ver los resultados para $\frac{1}{3}\omega_c$. En este caso el número de lazos que presenta la órbita es dos, siendo totalmente visibles para una profundidad de fisura de $\alpha = 0.550$.

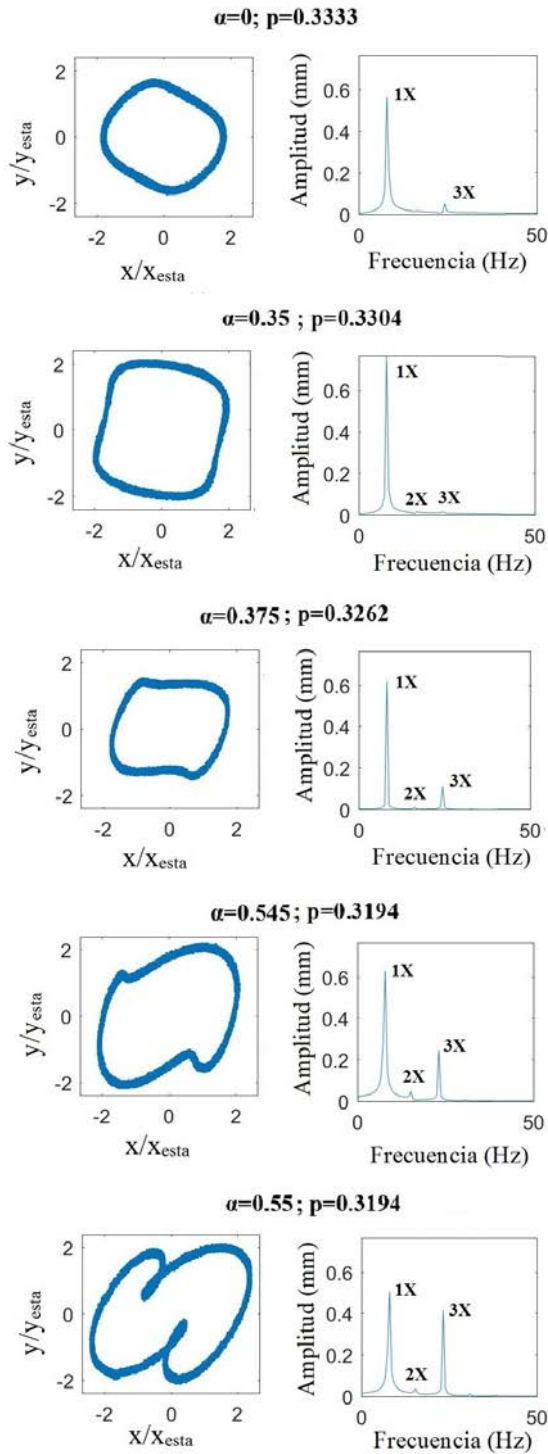


Figura 3.71: Órbitas en $\frac{1}{3}\omega_c$ casos: Sin fisura, $\alpha = 0.350, 0.375, 0.545$ y 0.550 .

En cuanto al espectro de frecuencias, en este caso se observan tres armónicos, siendo más visibles a medida que aumenta el tamaño de la fisura. Además, relacionando los valores de los cocientes $\frac{A_1}{A_3}$ obtenidos en la tabla 3.8, con las órbitas se observa que en el caso de $\alpha = 0.375$, el cociente $\frac{A_1}{A_3} \geq 3$, por lo que para $\frac{1}{3}\omega_c$, la órbita no presenta lazos interiores. Sin embargo, para $\alpha = 0.55$, el cociente $\frac{A_1}{A_3} \leq 3$, por lo que presenta dos lazos interiores.

Del mismo modo en la figura 3.72 se pueden ver los resultados para $\frac{1}{2}\omega_c$. En este caso el número de lazos que presenta la órbita es de uno. Como se puede observar, la presencia de dichos lazos y el tamaño de estos, dependen de la profundidad de fisura, aumentando su tamaño a medida que aumenta la profundidad. Así, se puede ver en la figura 3.72, por ejemplo, como para una profundidad de fisura $\alpha = 0.350$, aún no hay presencia del lazo, apareciendo este en $\alpha = 0.375$, y haciéndose cada vez más grande a medida que α aumenta.

Con respecto al espectro de frecuencias, en este caso se observan dos armónicos, $1X$ y $2X$, aumentando sus amplitudes a medida que lo hace el tamaño de la fisura. En este caso, de la relación de los cocientes $\frac{A_1}{A_2}$, se obtiene que para $\alpha = 0.375$, el cociente $\frac{A_1}{A_2} \leq 2$, por lo que en $\frac{1}{2}\omega_c$, la órbita presenta un lazo interior. En el caso de $\alpha = 0.350$, el cociente $\frac{A_1}{A_2} \geq 2$, por lo que para $\frac{1}{2}\omega_c$, la órbita no presenta un lazo interior.

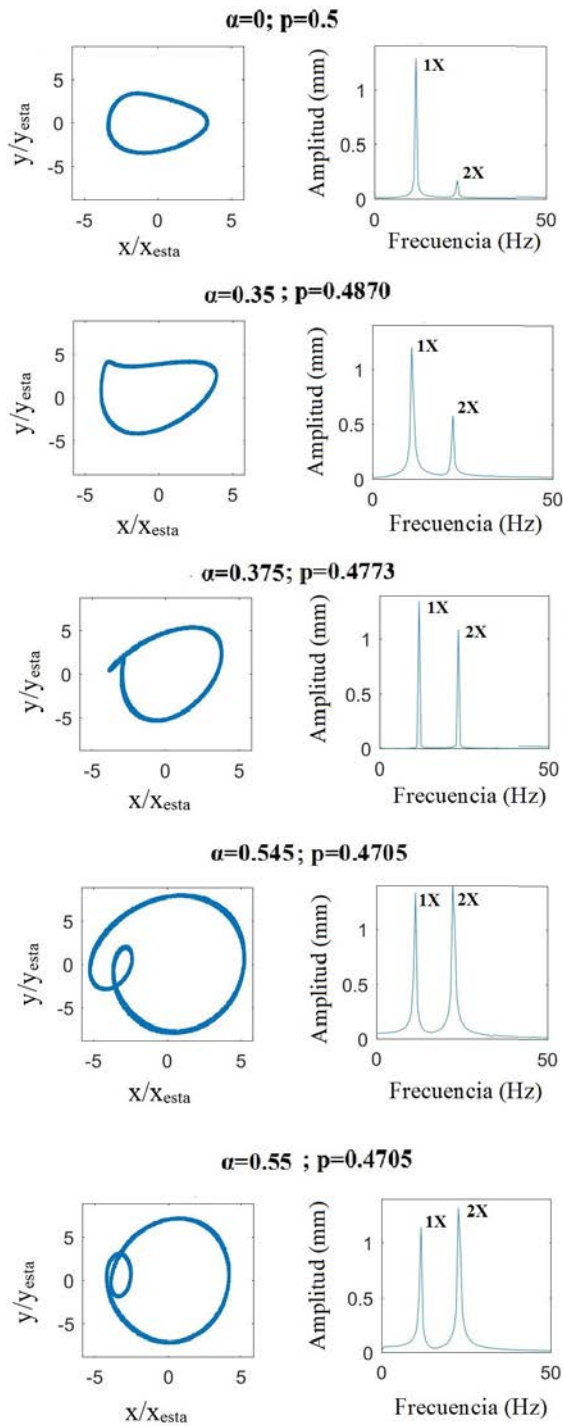


Figura 3.72: Órbitas en $\frac{1}{2}\omega_c$ casos: Sin fisura, $\alpha = 0.350, 0.375, 0.545$ y 0.550 .

Después de analizar las tres velocidades de giro, se ha observado que las órbitas no siempre presentan lazos interiores en $\frac{1}{n}\omega_c$, ya que dependiendo de la profundidad de fisura y la velocidad de giro aparecen o no. Sin embargo, en el espectro de frecuencias siempre son visibles los nX armónicos. Por ello, el análisis de las órbitas junto al del espectro de frecuencias es más eficiente desde el punto de vista de la identificación de la fisura.

Por tanto, después de analizar los resultados obtenidos se concluye que el aumento de la profundidad de fisura de un eje producirá:

- La aparición en la órbita de $n - 1$ lazos interiores a velocidades próximas a $\frac{1}{n}\omega_c$.
- El aumento del tamaño de los lazos.
- La disminución de la velocidad crítica.
- La presencia de nX armónicos en el espectro de frecuencias a $\frac{1}{n}\omega_c$, aunque no lleguen a aparecer los lazos interiores en la órbita.
- La disminución del cociente $\frac{\lambda_1}{\lambda_n}$ a medida que aumenta la profundidad de fisura (ver tabla 3.8).
- La aparición de $n - 1$ lazos interiores en la órbita cuando el valor de $\frac{\lambda_1}{\lambda_n} \leq n$.

Esta última conclusión se considera una de las aportaciones de la presente Tesis Doctoral.

3.2.3.2 Estimación de la profundidad de la fisura

Una vez determinada la velocidad crítica del rotor fisurado, el siguiente paso para completar la identificación de la fisura es estimar la profundidad de la misma en cada instante. En este apartado se presenta una metodología para relacionar la velocidad crítica de un eje fisurado con el tamaño de la fisura, que permitirá identificarla a partir de los datos experimentales.

Dadas unas condiciones de apoyo y unas propiedades geométricas y de material, se han obtenido las velocidades críticas correspondientes a cada uno de los ejes con fisuras de distintas profundidades siguiendo el procedimiento indicado

en el apartado anterior. Con las parejas de datos profundidad-velocidad crítica de la tabla 3.8 se obtiene la expresión mediante técnicas de regresión

$$\alpha = 101.77(p_c)^2 - 205.56p_c + 104.08 \quad (3.14)$$

con un coeficiente de determinación $R^2 = 0.9996$. Esta permitirá la identificación de la profundidad de la fisura de un eje a partir de la velocidad crítica previamente determinada.

En resumen, el procedimiento a seguir para la estimación de la velocidad crítica consiste en realizar un barrido de Ω , observar la presencia de i armónicos y determinar el mínimo de los cocientes $\frac{\Lambda_1}{\Lambda_i}$ que se corresponde con una velocidad de giro que en ese instante se convierte en p_c y con dicho p_c entrar en la expresión.

Por tanto, se puede establecer una relación entre el valor de la velocidad crítica y de los cocientes con el tamaño de fisura, permitiendo estimar el tamaño de la fisura en cada instante utilizando la metodología presentada. Este último punto es una aportación de la tesis.

3.2.3.3 Estudio de la evolución de la fisura en los ensayos

En este apartado se realiza un estudio de la propagación de la fisura a partir de los datos de velocidad crítica.

En la figura 3.73 se muestran los resultados obtenidos para el caso de $\alpha_0 = 0.375$, $\theta = 0^\circ$, $\frac{1}{4}\omega_c$. Se exponen los resultados de distintos momentos del ensayo, inicio (1), situaciones intermedias (2 y 3) y final (4). Al igual que en el apartado anterior, en las figuras se representan las órbitas y el espectro de frecuencias.

Como ya se ha comentado anteriormente, $\frac{1}{4}\omega_c$ es una velocidad en la que es difícil ver los lazos de las órbitas, no siendo visibles en ningún instante durante el ensayo. En cuanto al espectro de frecuencias se observa que la amplitud del armónico n aumenta a medida que avanza el ensayo.

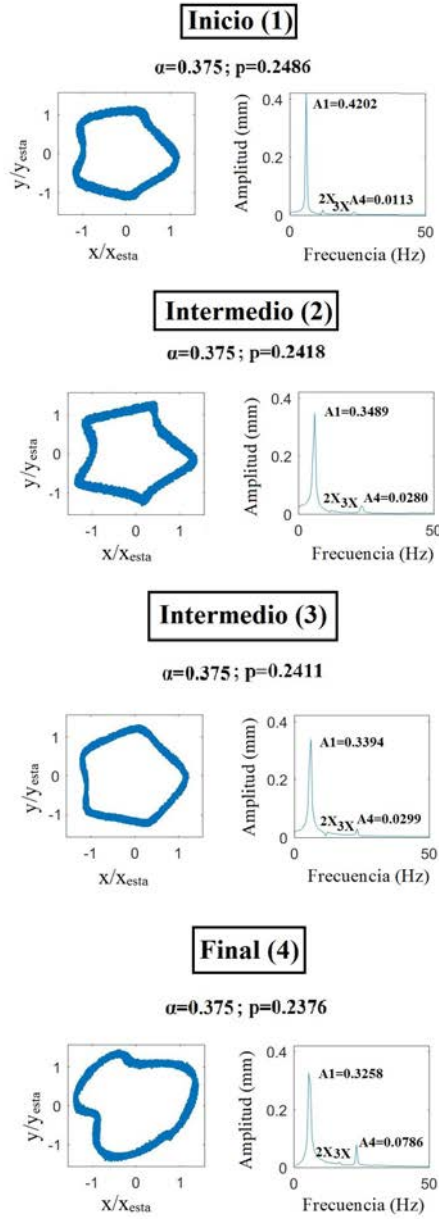
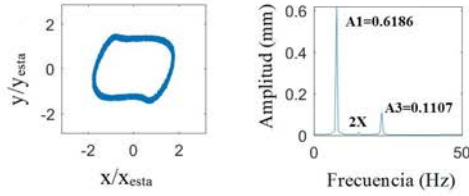


Figura 3.73: Propagación de la fisura. Órbitas en $\frac{1}{4}\omega_c$. Fisura inicial $\alpha_0 = 0.375$.

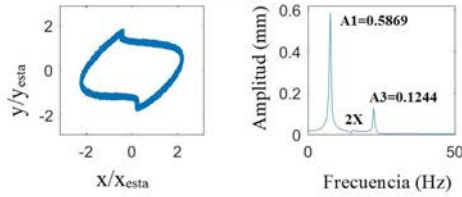
En la figura 3.74 se muestran los resultados obtenidos para el mismo caso de $\alpha_0 = 0.375$, $\theta = 0^\circ$ pero a una velocidad próxima a $\frac{1}{3}\omega_c$.

Inicio (1)

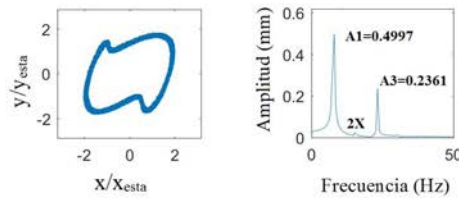
$$\alpha=0.375; p=0.3262$$

**Intermedio (2)**

$$\alpha=0.375; p=0.3207$$

**Intermedio (3)**

$$\alpha=0.375; p=0.3173$$

**Final (4)**

$$\alpha=0.375; p=0.3187$$

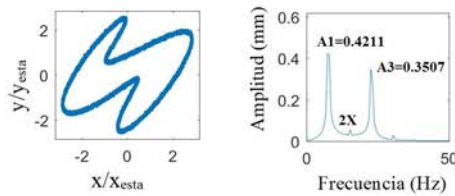


Figura 3.74: Propagación de la fisura. Órbitas en $\frac{1}{3}\omega_c$. Fisura inicial $\alpha_0 = 0.375$.

En este caso, aparecen dos lazos incipientes en la órbita en el instante intermedio (3) y en el final del ensayo (4). Nuevamente de la amplitud del armónico n

aumenta a medida que avanza el ensayo.

Del mismo modo en la figura 3.75 se muestran los resultados obtenidos para el caso de $\alpha_0 = 0.375$, $\theta = 0^\circ$ y $\frac{1}{2}\omega_c$.

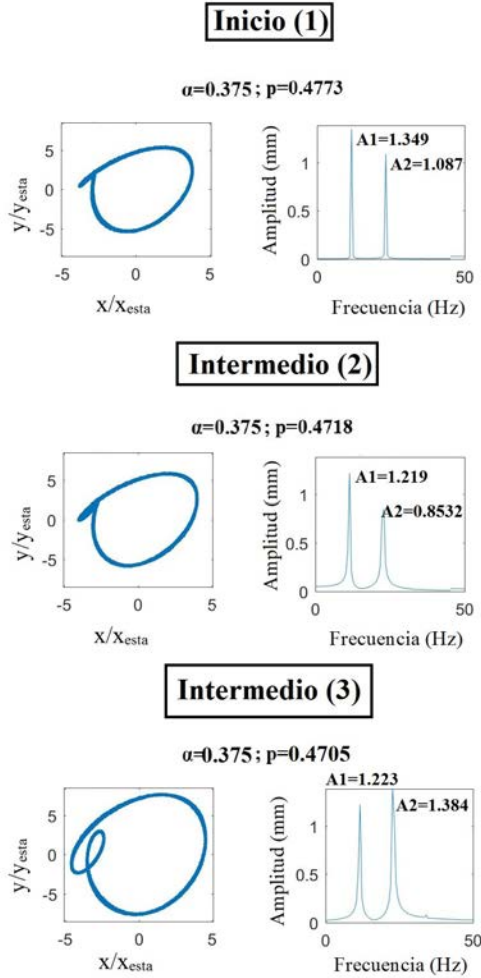


Figura 3.75: Propagación de la fisura. Órbitas en $\frac{1}{2}\omega_c$. Fisura inicial $\alpha_0 = 0.375$.

Se hace necesario destacar que en este caso, no se muestran resultados del final del ensayo, dado que a una determinada profundidad de fisura, el eje no alcanza dicha velocidad por seguridad y la máquina llega al final del ensayo, ya que los desplazamientos se incrementan hasta el máximo permitido.

En este caso se puede ver como el tamaño de los lazos de las órbitas aumenta, según avanza el ensayo, lo que indica que la profundidad de la fisura está aumentando también. Este aumento está relacionado con el incremento de la amplitud de la componente nX del espectro de frecuencias que incluso llega a superar a la componente $1X$, como se observa en el instante (3).

Con el objetivo de poder estimar el tamaño de la fisura en cada momento del ensayo, se calcula la velocidad crítica del eje fisurado en cada instante del ensayo. Para ello, como se ha explicado previamente se calculan los cocientes $\frac{A_1}{A_n}$, del rango de velocidades cercano a $\frac{1}{n}\omega_c$, de los cuales el mínimo indica el valor de $\frac{1}{n}\omega_c$. En este caso, la velocidad crítica ha sido calculada con los cocientes de $\frac{A_1}{A_3}$, obteniéndose valores similares si esta se calcula con $\frac{A_1}{A_2}$ o $\frac{A_1}{A_4}$.

En las figuras 3.76 a 3.79 se muestran los espectros de frecuencias del rango de velocidades cercano a $\frac{1}{3}\omega_c$ a partir de los cuales se obtienen los cocientes $\frac{A_1}{A_3}$ resumidos en la tabla 3.9.

En la figura 3.76 se muestran para el “instante inicial” el barrido fino en $\Omega \approx \frac{1}{3}\omega_c$. Con el procedimiento indicado la velocidad crítica es $p_c = 0.3262$. De la misma forma se explican las figuras 3.77, 3.78 y 3.79 para los “instantes intermedios 2 y 3” y para el “instante final” respectivamente.

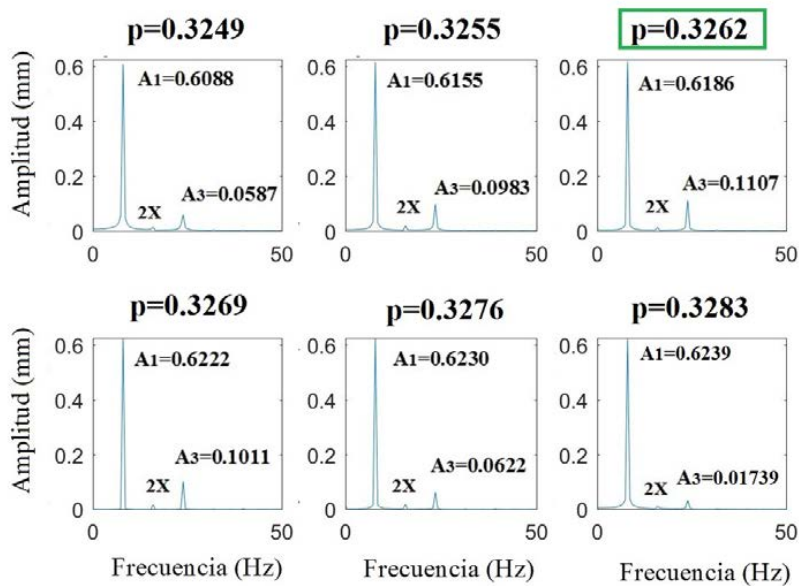


Figura 3.76: FFT para el instante inicial (1) en velocidades cercanas a $\frac{1}{3}\omega_c$.

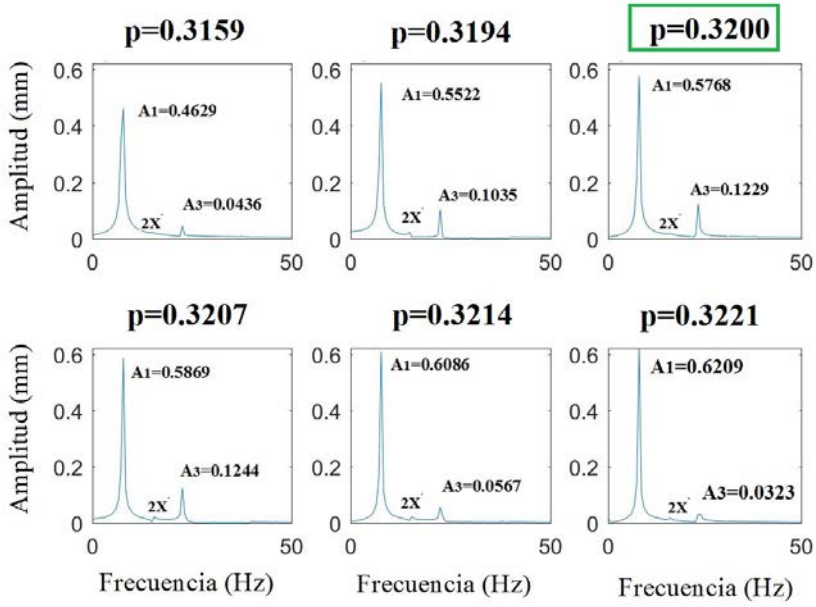


Figura 3.77: FFT para el instante intermedio (2) en velocidades cercanas a $\frac{1}{3}\omega_c$.

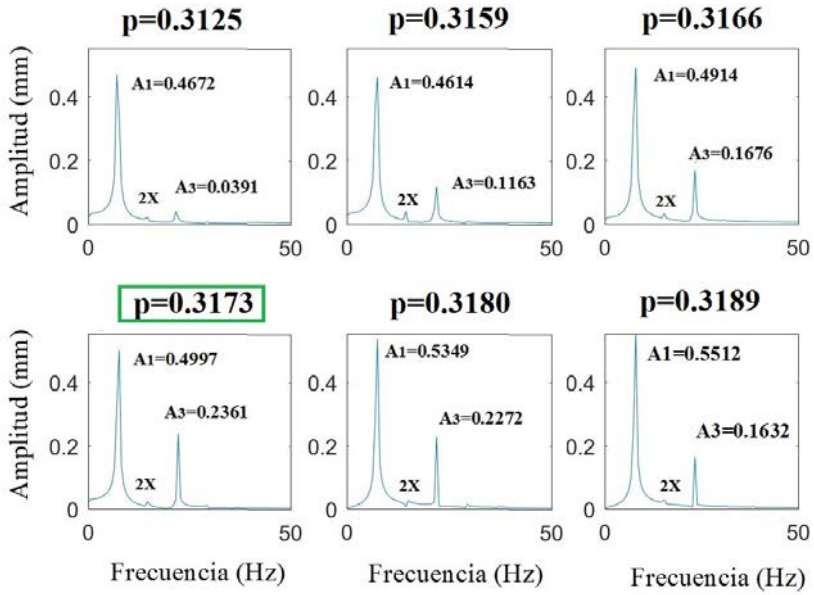


Figura 3.78: FFT para el instante intermedio (3) en velocidades cercanas a $\frac{1}{3}\omega_c$.

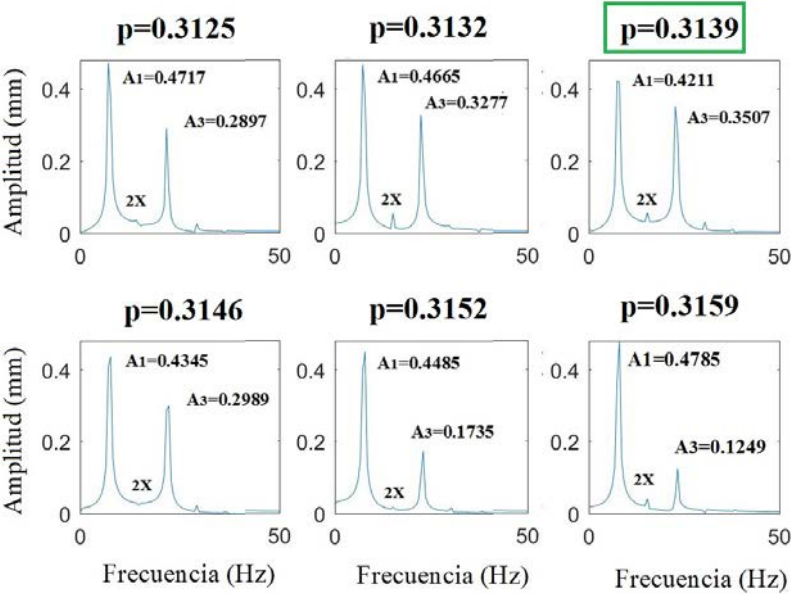


Figura 3.79: FFT para el instante final (4) en velocidades cercanas a $\frac{1}{3}\omega_c$.

Tabla 3.9: Cálculo velocidad crítica para los distintos instantes durante el ensayo.

Inicio (1)		Intermedio (2)		Intermedio (3)		Final (4)	
p	$\frac{A_1}{A_3}$	p	$\frac{A_1}{A_3}$	p	$\frac{A_1}{A_3}$	p	$\frac{A_1}{A_3}$
0.3249	10.3626	0.3159	10.6170	0.3125	11.9488	0.3125	1.6282
0.3256	6.2595	0.3194	5.3353	0.3159	3.9673	0.3132	1.4236
0.3262	5.5881	0.3200	4.6932	0.3166	2.9320	0.3139	1.2007
0.3269	6.1543	0.3207	4.7178	0.3173	2.1165	0.3146	1.4537
0.3276	10.0225	0.3214	10.7337	0.3180	2.3543	0.3152	2.5850
0.3283	35.8769	0.3221	19.2225	0.3189	3.3366	0.3159	3.8311

En la tabla 3.10 se muestran los resultados de la velocidad crítica y de los cocientes $\frac{A_1}{A_2}$, $\frac{A_1}{A_3}$ y $\frac{A_1}{A_4}$ correspondientes a $\frac{1}{2}\omega_c$, $\frac{1}{3}\omega_c$ y $\frac{1}{4}\omega_c$ del eje en cada instante del ensayo, respectivamente.

Tabla 3.10: $\frac{A_1}{A_n}$ propagación de la fisura caso $\alpha = 0.375$ $\theta = 0^\circ$.

Estado del ensayo	p_c	$\frac{A_1}{A_2}$	$\frac{A_1}{A_3}$	$\frac{A_1}{A_4}$
(1)	0.9786	1.2409	5.5881	37.0220
(2)	0.9621	0.9692	4.7178	13.8343
(3)	0.9519	0.8837	2.1165	11.3398
(4)	0.9417	-	1.1902	4.1445

A la vista de los resultados se puede decir que a medida que el ensayo avanza, tanto la velocidad crítica del eje como el valor de los cocientes $\frac{A_1}{A_n}$ disminuyen, lo que indica un crecimiento de la fisura.

Comparando los resultados con los obtenidos en el apartado anterior (ver tabla 3.8), se puede ver como en instante intermedio (2), los valores de velocidad y de los cocientes ($p = 0.9621$ y $\frac{A_1}{A_3} = 4.7178$) se encuentran entre los valores correspondientes a una profundidad de fisura de $\alpha = 0.375$ ($p = 0.9786$ y $\frac{A_1}{A_3} = 5.5881$) y 0.545 ($p = 0.9582$ y $\frac{A_1}{A_3} = 2.5658$). Los valores del instante (3) ($p = 0.9519$ y $\frac{A_1}{A_3} = 2.1165$) se encuentran entre los valores correspondientes a una profundidad de fisura de 0.545 ($p = 0.9582$ y $\frac{A_1}{A_3} = 2.5658$) y los de $\alpha = 0.55$ ($p = 0.9582$ y $\frac{A_1}{A_3} = 1.2138$), y los del final (4) son inferiores ($p = 0.9417$ y $\frac{A_1}{A_3} = 1.1902$) que los obtenidos para la última profundidad de fisura estudiada ($\alpha = 0.55$), lo que hace pensar que la fisura tendrá un tamaño $\alpha \geq 0.55$.

En resumen, los datos del ensayo mostrados indican una propagación de la fisura hasta valores superiores a $\alpha = 0.55$ pasando de $\alpha_0 = 0.375$ a $\alpha_f \geq 0.55$.

En la figura 3.80, se muestra una imagen del frente de fisura, una vez terminado el ensayo tomada con el microscopio de medición 2D Swift Duo, del caso analizado ($\alpha = 0.375$ y $\theta = 0^\circ$). El tamaño final de la fisura es de $\alpha = 0.64$, en concordancia con el razonamiento anterior.

Por otro lado, haciendo uso de la expresión de la profundidad relativa de la fisura en función de la velocidad crítica obtenida en la ecuación 3.14, se pueden

obtener los valores estimados de profundidad para el caso analizado (ver tabla 3.11).

Tabla 3.11: Estimación de la profundidad de la fisura

p_c	α_{medida}	$\alpha_{estimada}$	error %
0.9786	0.375	0.3798	1.3
0.9621	–	0.5127	–
0.9519	–	0.6226	–
0.9417	0.640	0.7537	17.7

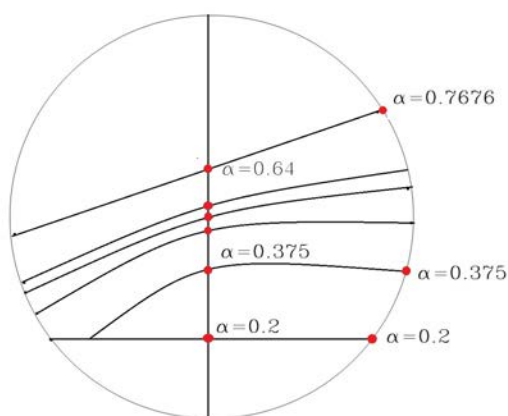


Figura 3.8o: Frente de fisura una vez terminado el ensayo $\alpha = 0.375$ y $\theta = 0^\circ$.

Por tanto, de todo lo expuesto en este apartado sobre la propagación de la fisura, se concluye que:

- Las órbitas acompañadas del espectro de frecuencia dan gran información de la propagación de la fisura siendo fuertes indicadores de esta, el aumento del tamaño de la órbita y del lazo, y el aumento de la amplitud de la frecuencia asociada al armónico nX .
- La disminución de la velocidad crítica y de los cocientes $\frac{A_1}{A_n}$, a medida que avanza el ensayo, son claros indicadores de que la fisura ha propagado.

3.2.3.4 Influencia de la orientación de la masa excéntrica

Para el estudio de la influencia de la orientación de la masa excéntrica, en el comportamiento dinámico de un eje fisurado rotatorio, se han analizado tres

orientaciones, $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ y 90° (ver figura 3.58). En este caso se presentan los resultados obtenidos para un eje con profundidad de la fisura de $\alpha = 0.4$.

Los resultados que se presentan aquí se corresponden con los obtenidos en los ensayos que se realizaron para la puesta a punto del equipo experimental sobre ejes solo entallados y que fisuraron durante los ensayos. En la figura 3.81 se muestran las órbitas y el espectro de frecuencias para las tres orientaciones de la masa excéntrica. Los resultados se corresponden con $\frac{1}{2}\omega_c$.

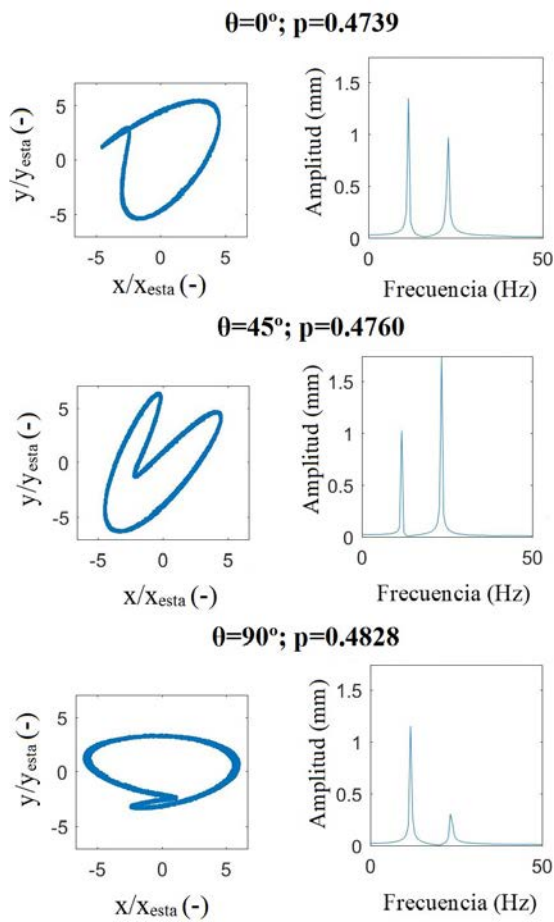


Figura 3.81: Órbitas en $\frac{1}{2}\omega_c$ para $\alpha = 0.5$ y $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ y 90° .

Como en casos anteriores, en $\frac{1}{2}\omega_c$, la órbita presenta o tiende a presentar un lazo interior, independientemente de la orientación de la masa excéntrica.

En cuanto al espectro de frecuencias, en los tres casos, predominan sobre el resto las frecuencias correspondientes a los dos armónicos $1X$ y $2X$, variando su amplitud según el caso.

En la tabla 3.12, se muestran los valores de $\frac{1}{2}\omega_c$ y de ω_c para cada una de las orientaciones de la masa excéntrica.

Tabla 3.12: Velocidad crítica según θ .

θ	$\frac{1}{2}p_c$	p_c
0°	0.4739	0.9478
45°	0.4760	0.9520
90°	0.4828	0.9656

Se observa que según aumenta en ángulo θ de la orientación de la masa excéntrica, la velocidad crítica del eje es mayor. Por tanto, un eje con una masa excéntrica orientada a $\theta = 0^\circ$ se comportaría como un eje con un tamaño de fisura mayor que un eje con una masa excéntrica orientada a $\theta = 90^\circ$. Las conclusiones obtenidas para $\frac{1}{2}\omega_c$, son aplicables a otras velocidades subcríticas.

Una vez terminados los ensayos, se analiza el frente de fisura con el microscopio de medición 2D Swift Duo. En las figuras 3.82, 3.83 y 3.84, se muestran las imágenes y las medidas realizadas. En estos casos, se puede ver como a medida que cambia la orientación de la masa excéntrica, lo hace también la de las playas de fatiga. También, se puede ver, para los casos $\theta = 45^\circ$ y 90° que la forma del frente cambia a medida que se propaga la fisura, pasando de ser recto a tener forma cóncava, para terminar siendo recto otra vez, tal como se indica en [40].

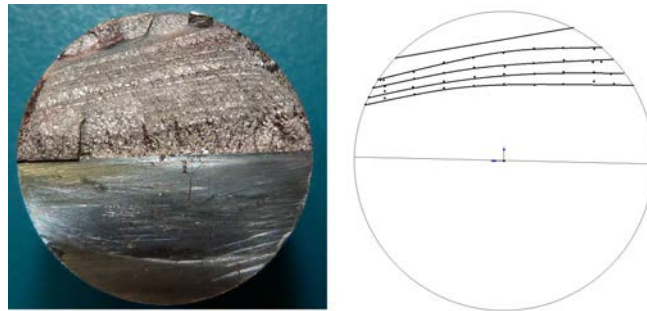


Figura 3.82: Frente de fisura $\alpha = 0.5$ y $\theta = 0^\circ$.

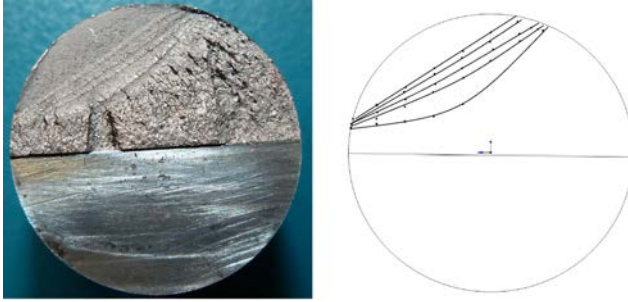


Figura 3.83: Frente de fisura $\alpha = 0.5$ y $\theta = 45^\circ$.

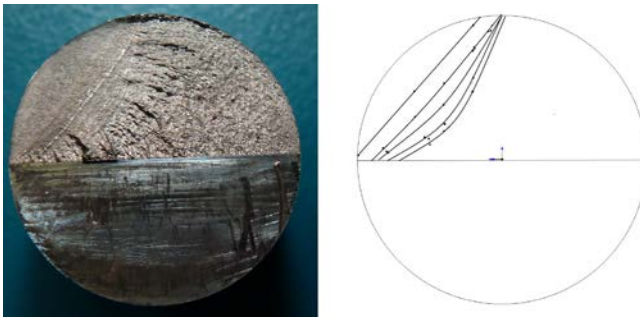


Figura 3.84: Frente de fisura $\alpha = 0.5$ y $\theta = 90^\circ$.

Se resumen a continuación los aspectos novedosos analizados en este apartado:

- La velocidad crítica aumenta a medida que aumenta el ángulo entre la masa excéntrica y la fisura.
- Un eje con una masa excéntrica orientada a $\theta = 90^\circ$ se comporta como un eje con un tamaño de fisura mayor que un eje con una masa excéntrica orientada a un ángulo $\theta = 90^\circ$.
- La orientación de las playas de fatiga del frente de fisura se ve afectada por la orientación de la masa excéntrica.

TÉCNICAS NUMÉRICAS

En este cuarto capítulo se describe el modelo numérico dinámico tridimensional desarrollado en la presente Tesis Doctoral, así como la tipología de los resultados obtenidos. El modelo ha sido validado mediante la comparación de los resultados obtenidos con los resultados experimentales y los de la bibliografía. A continuación se analizan y discuten los resultados obtenidos de las órbitas descritas por el punto central de la sección fisurada para distintas velocidades de giro del eje fisurado y se observa la influencia que tiene el tamaño de la fisura en estas.

4.1 MODELO NUMÉRICO DEL EJE GIRATORIO FISURADO

4.1.1 *Planteamiento del problema*

Se ha desarrollado un modelo numérico 3D dinámico de un Jeffcott Rotor fisurado modificado mediante el que se ha simulado el giro a distintas velocidades considerando la gravedad con el objetivo de estudiar el comportamiento dinámico de un eje fisurado que está sometido a una carga simulada por un disco y que presenta un desequilibrio producido por una masa excéntrica. Se han analizado 16 vueltas completas tomando datos cada 5° y se han estudiado las órbitas descritas por la sección fisurada.

Se ha considerado un eje de longitud $L = 900 \text{ mm}$ y diámetro $D = 20 \text{ mm}$ (ver figura 3.57). El material del eje es aluminio, con un Módulo de Young de $E = 72 \text{ GPa}$, densidad $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ y coeficiente de Poisson $\nu = 0.33$. Este contiene una fisura transversal de frente recto en su sección central de profundidad relativa α . El eje está sometido al disco de masa $m_d = 5 \text{ kg}$ colocado en la sección central del eje. Además, presenta una masa excéntrica de $m_e = 0.2 \text{ kg}$, situada a una distancia en dirección radial de $e = 75 \text{ mm}$ y con una orientación θ con respecto a la fisura.

En el análisis realizado se han considerado los siguientes valores de los parámetros:

- Profundidad de la fisura α . Se han considerado dos profundidades de fisura diferentes $\alpha = 0.25$ y 0.5 (ver figura 4.85 (a)).
- Orientación de la masa excéntrica θ . Se han analizado tres orientaciones de la masa excéntrica $\theta = 0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. Estas se representan en la figura 4.85 (b), donde la masa excéntrica se representa en negro y la fisura es la parte rayada.
- Velocidad de giro Ω . En este trabajo se analiza el comportamiento dinámico de un rotor en velocidades próximas a $\frac{1}{2}\omega_c$, $\frac{1}{3}\omega_c$ y $\frac{1}{4}\omega_c$ debido a que estas velocidades son características en la dinámica de ejes. También se analiza una velocidad distinta de las críticas entre $\frac{1}{2}\omega_c$ y ω_c .

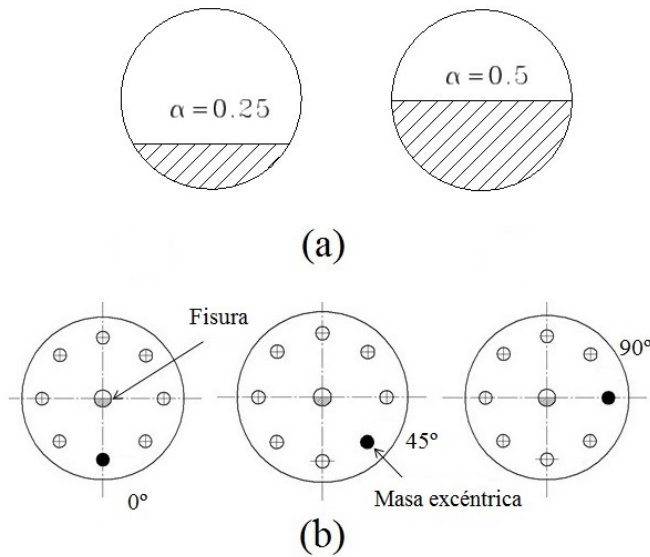


Figura 4.85: Profundidades de fisura (a) y orientaciones de la masa excéntrica analizadas en el modelo numérico (b).

Por lo tanto, combinando los parámetros α , θ y Ω , se han realizado un total de 19 casos diferentes analizando en cada caso las 15 posiciones del frente de fisura.

4.1.2 Descripción del modelo numérico

En el presente apartado se describe el modelo numérico dinámico tridimensional que se ha desarrollado para resolver el problema planteado anteriormente. Para la resolución se hace uso de la versión 6.13 del código comercial Abaqus [65].

4.1.2.1 Tipos de análisis

El análisis del modelo numérico se ha llevado a cabo usando de manera combinada los códigos comerciales Abaqus/Standard y Abaqus/Explicit abordando los siguientes pasos:

1. Cálculo estático, mediante Abaqus/Standard, que simula el sistema Jeffcott Rotor modificado en reposo sometido únicamente al peso propio. Los resultados estáticos se han utilizado como condiciones iniciales para el análisis dinámico posterior.

2. Análisis dinámico realizado con Abaqus/Explicit en el que se somete al eje, a la correspondiente velocidad de giro.

4.1.2.2 Contactos entre superficies

Modelización de la fisura

Para realizar la modelización de la sección fisurada se han considerado dos tramos de eje, los cuales estarán unidos en la parte intacta, y libres en la zona de la fisura. Con el fin de garantizar la unión en la zona intacta, se ha establecido una interacción tipo *tie*, según la nomenclatura de ABAQUS, entre las superficies que constituyen la parte intacta de dicha sección. El detalle de esta unión para el caso de $\alpha = 0.25$ se puede observar en la figura 4.86 representada en gris.

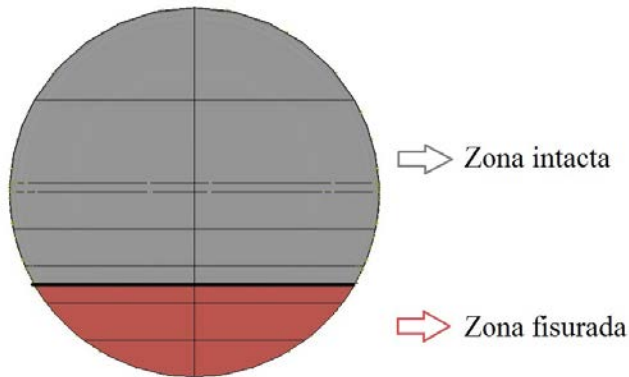


Figura 4.86: Detalle de la zona intacta y la zona fisurada.

La zona fisurada se ha definido mediante un contacto *Rough Friction* y *Hard Contact* entre las dos superficies correspondientes a las caras libres de la fisura. Este contacto se caracteriza por un comportamiento tangencial con coeficiente de rozamiento infinito (*Rough friction*) y, por un comportamiento normal, (*Hard Contact*) [65] que permite que las superficies no transmitan presión de contacto a menos que los nodos de una de las superficies estén en contacto con los de la otra y se evita que el material de uno de los lados penetre en el otro cuando la fisura se cierra. Además, se hace posible la separación de las superficies después del contacto. En la figura 4.86 se puede observar la zona fisurada representa en rojo para el caso de $\alpha = 0.25$.

Interacción entre eje y disco

El conjunto que forman el disco y la masa excéntrica debe girar en todo momento solidario con el eje. Para ello se considera una interacción entre las superficies del disco y del eje, que ha sido definida de forma idéntica a la utilizada en la interacción de la zona intacta de la sección fisurada. En la figura 4.87 se puede ver un detalle de la zona.

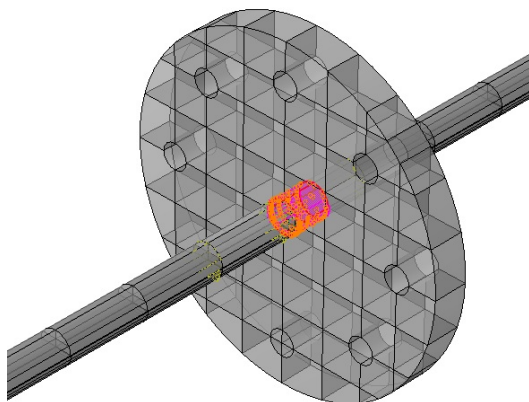


Figura 4.87: Detalle de la zona del eje donde se define la interacción eje-disco.

4.1.2.3 Cargas y condiciones de contorno

El modelo ha sido sometido a unas condiciones de carga y de contorno en cada una de los pasos definidos para completar el análisis propuesto y que se explican a continuación.

En relación a las cargas, en los dos tipos de análisis se ha considerado la gravedad. En el análisis dinámico, se ha impuesto una velocidad de giro Ω alrededor del eje geométrico del conjunto, eje Z (ver figura 4.88). Para poder dar movimiento al eje y evitar desequilibrios, se crean cuatro puntos de referencia. Dos de ellos, situados en el centro de la sección de los extremos del eje, definen el eje de giro del modelo, y en ellos se impondrán las condiciones de contorno referidas a los apoyos. En los otros dos, situados a 10 mm de los extremos del eje y en el mismo eje de giro, se impone la velocidad de giro de estudio. Estos últimos puntos se unen a los extremos del eje mediante dos interacciones de acoplamiento *coupling* (ver figura 4.89).

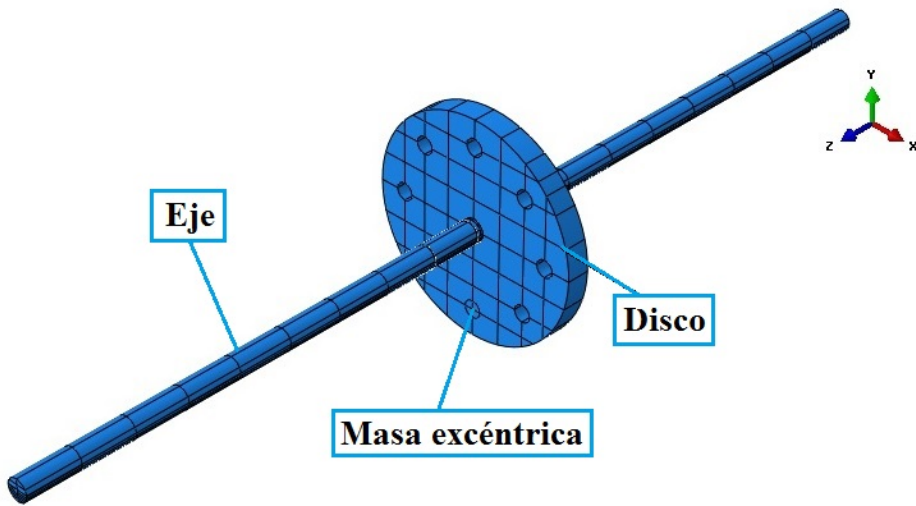


Figura 4.88: Modelo numérico dinámico tridimensional.

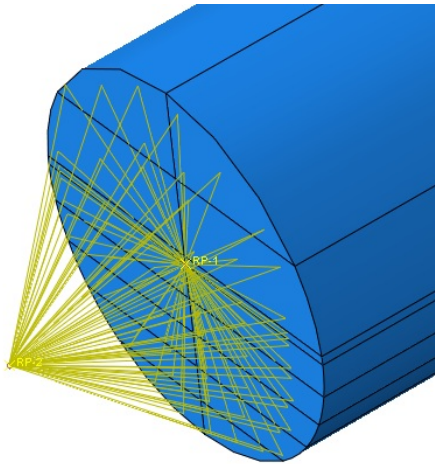


Figura 4.89: Interacción *coupling* en uno de los extremos del eje.

En cuanto a las condiciones de contorno, se han reproducido las condiciones de los apoyos de los ensayos experimentales explicados en el capítulo 3. Dichas condiciones se corresponden con empotramientos en los dos extremos ($u_x = 0$, $u_y = 0$, $u_z = 0$, $\theta_x = 0$ y $\theta_y = 0$).

Por último, ha sido necesario especificar el amortiguamiento del sistema. Tomando como referencia el trabajo [66], se considera el modelo de amortiguamien-

to de Rayleigh, que está definido por la ecuación:

$$[C] = \delta[M] + \lambda[K] \quad (4.15)$$

Donde $[C]$ es la matriz de amortiguamiento, $[M]$ la matriz de masa, $[K]$ la matriz de rigidez y δ y λ , los coeficientes de Rayleigh. En este trabajo se han tomado inicialmente como referencia los coeficientes considerados en [66], que son $\delta = 1.36$ y $\lambda = 1.75 \cdot 10^{-5}$. Cuando se introduce el valor del coeficiente λ se incrementa en gran medida el tiempo de cálculo. Para evitarlo, en [65] se recomienda que el valor de λ debe ser menor o del mismo orden de magnitud que el incremento de tiempo estable inicial para un caso sin amortiguamiento, dado por Abaqus. Sin embargo, otros autores en [67], consideran que haciendo uso del método explícito en el análisis dinámico de una estructura, el valor de λ debe ser despreciable por su influencia en el incremento de tiempo de cálculo, ya que el coeficiente δ tiene mayor importancia. En este caso, el valor del incremento de tiempo estable inicial es $\Delta t = 1.9 \cdot 10^{-8}$, por tanto, siguiendo la recomendación de Abaqus ([65]) y las consideraciones de otros autores ([67]), se simplifica y se supone un valor de $\lambda = 0$.

4.1.2.4 Características de la malla

Tanto el eje como el disco han sido discretizados mediante elementos hexaédricos estructurados de integración reducida, C3D8R [65]. Con el objetivo de reducir al máximo el tiempo de cálculo, se realiza un mallado muy fino en la zona de la fisura y menos denso tanto transversal como longitudinalmente a medida que nos alejamos de la fisura y nos acercamos a los extremos del eje. Para determinar el tamaño óptimo de la malla, se ha realizado un análisis de sensibilidad hasta observar la convergencia de los resultados. Para ello se ha obtenido el desplazamiento vertical (y) en el punto central de la sección fisurada en el paso estático de la simulación. En la figura 4.90, se muestra un detalle de los mallados longitudinales propuestos para la zona cercana a la fisura, permaneciendo constante el mallado transversal (mostrado a la izquierda) con 16 elementos en la zona intacta y 40 en la zona fisurada. En este caso se han propuesto mallados desde 8 a 32 elementos, escogiendo finalmente el mallado de 20 elementos (malla 3), ya que como se muestra en la gráfica de la parte inferior de la figura, se alcanza la convergencia de resultados. Del mismo modo, en las figuras 4.91 y 4.92 se muestran

los resultados obtenidos al variar el número de elementos en el mallado transversal en la zona fisurada y en la zona intacta respectivamente, permaneciendo constante en este caso el mallado longitudinal escogido previamente. En todos los casos la malla escogida para el modelo numérico desarrollado en la presente Tesis Doctoral es la denominada en las figuras como malla 3 (recuadrada en azul), por lo que la malla de todo el modelo contiene 28024 elementos y 36455 nodos. Con este mallado y el equipo utilizado que cuenta con 64 GB de memoria RAM y dos procesadores cuya velocidad es de 2.6 GHz, los tiempos de cálculo de los casos analizados oscilan entre 168 y 360 horas dependiendo de la velocidad de giro.

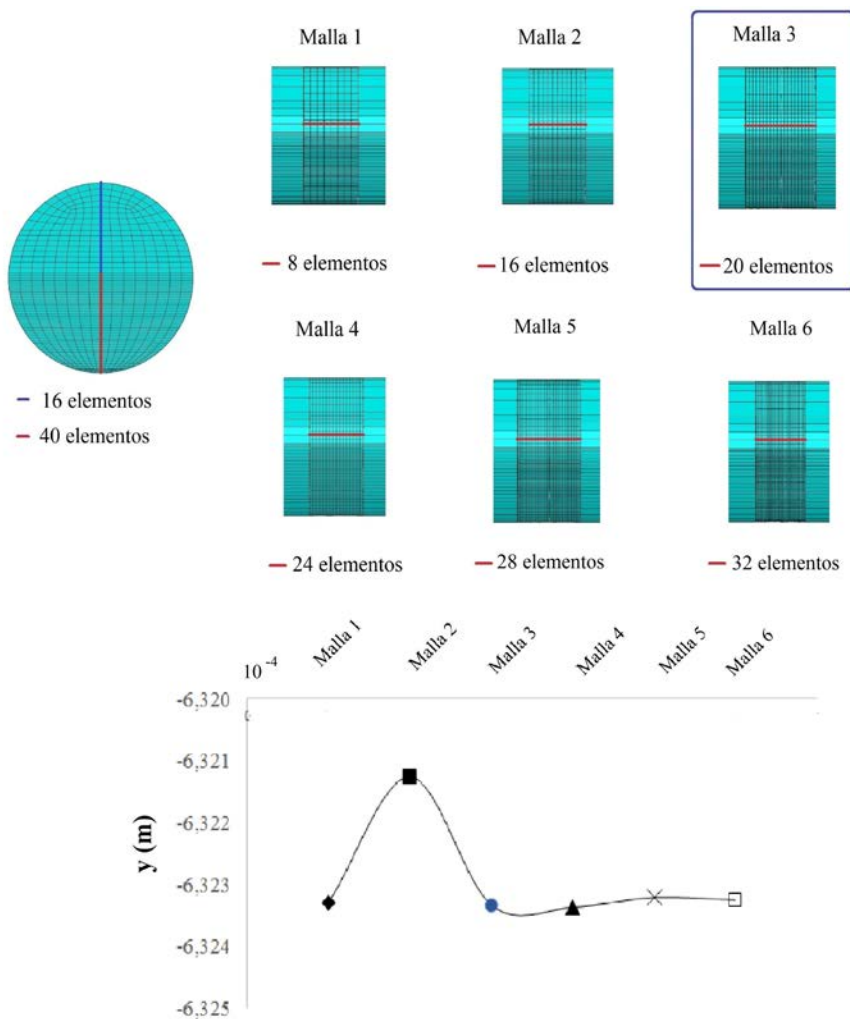


Figura 4.90: Análisis de sensibilidad de la malla. Variación del mallado longitudinal.

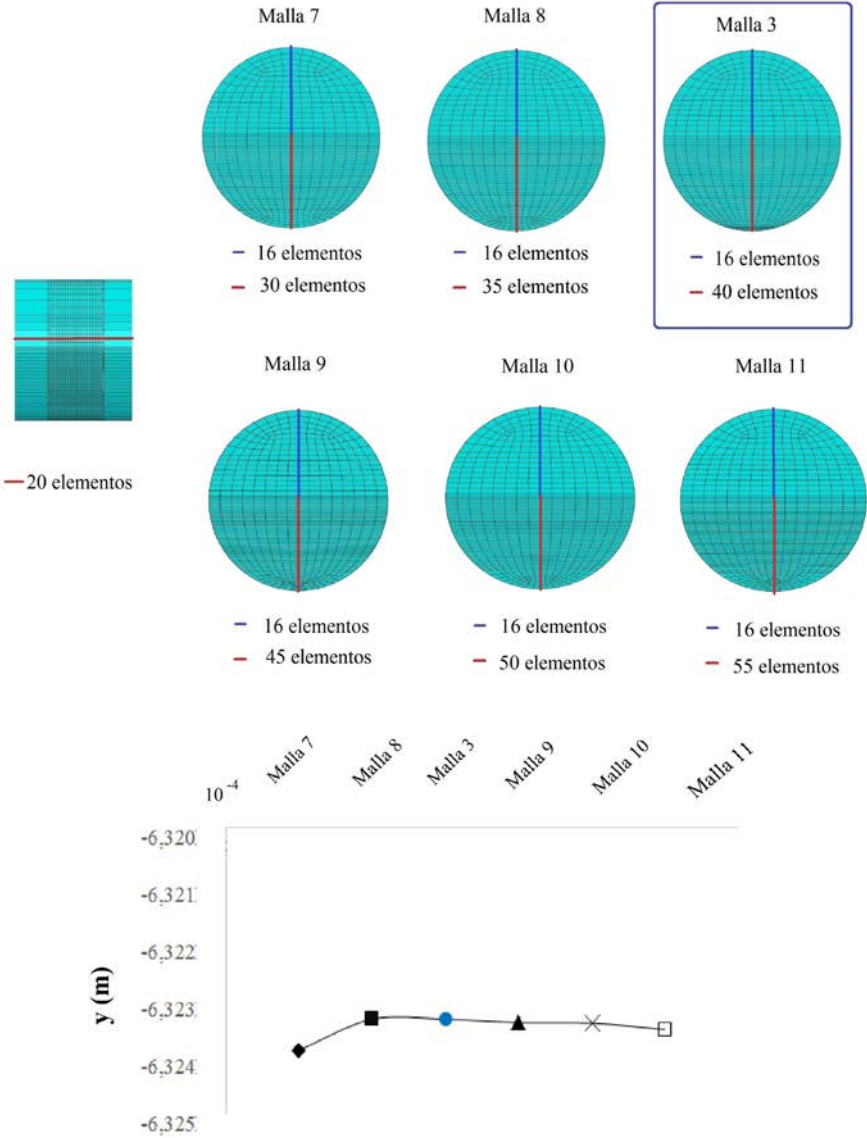


Figura 4.91: Análisis de sensibilidad de la malla. Variación del mallado transversal de la zona fisurada.

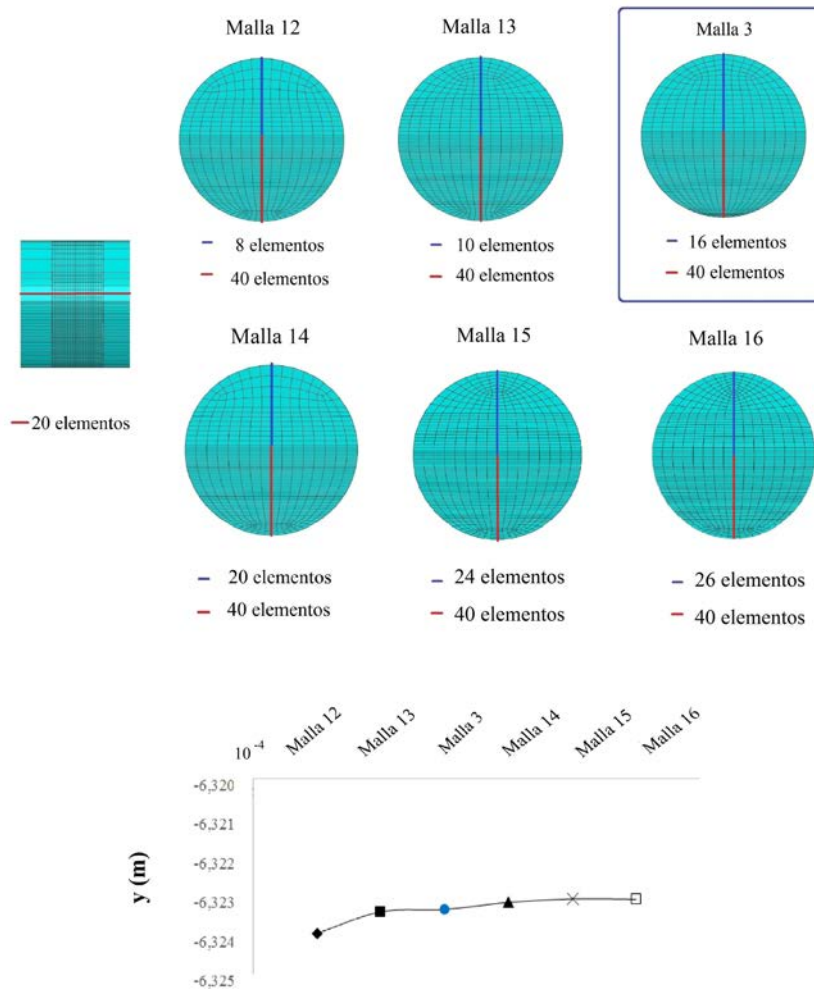


Figura 4.92: Análisis de sensibilidad de la malla. Variación del mallado transversal de la zona intacta.

4.1.3 Tipología de los resultados obtenidos del modelo

La solución del problema numérico de un eje fisurado giratorio se muestra en forma de los desplazamientos horizontales (eje X) y verticales (eje Y) del punto central de la sección de estudio para obtener las órbitas descritas por el eje, y de los desplazamientos de las caras que constituyen la fisura (eje Z) para el cálculo del FIT en cada posición relativa del del frente de la fisura.

Para todas las combinaciones de α , θ y Ω se han obtenido los desplazamientos y las órbitas correspondientes. Como ejemplo de los resultados obtenidos en las figuras 4.93 y 4.94 se representan los desplazamientos horizontal y vertical frente al tiempo respectivamente. En este caso se muestran los resultados obtenidos en 2.25 segundos para el caso de $\alpha = 0.5$, $\theta = 0^\circ$ y $p = 0.2651$. Los datos de 2.25 s se corresponden con un periodo transitorio hasta aproximadamente 2 s pasado el cual se puede considerar estacionario. Los 2.25 s se corresponden con 16 vueltas de las cuales se consideran las 3 últimas. Posteriormente, estos resultados serán tratados y analizada la influencia de estas variables en el comportamiento dinámico del eje.

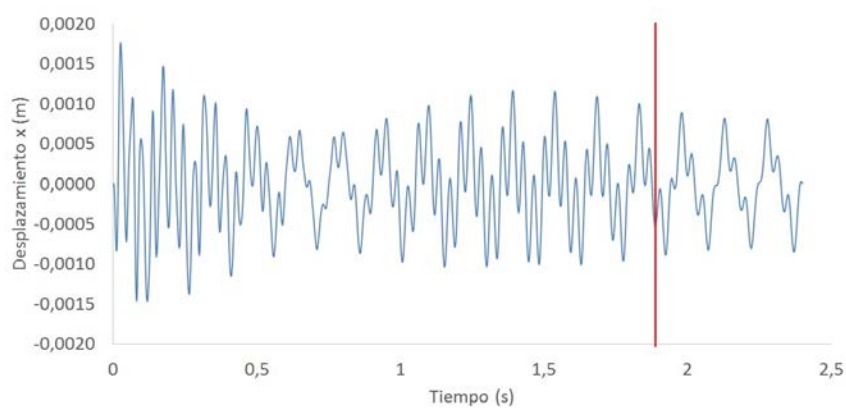


Figura 4.93: Desplazamiento en la dirección x para el caso $\alpha = 0.5$, $\theta = 0^\circ$ y $p = 0.2651$.

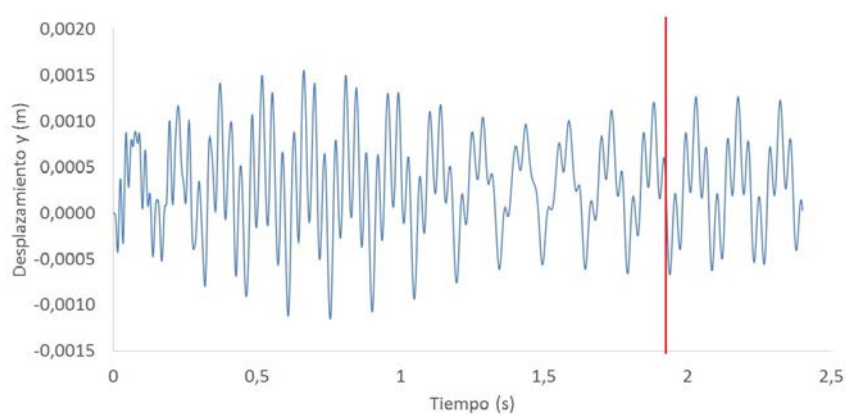
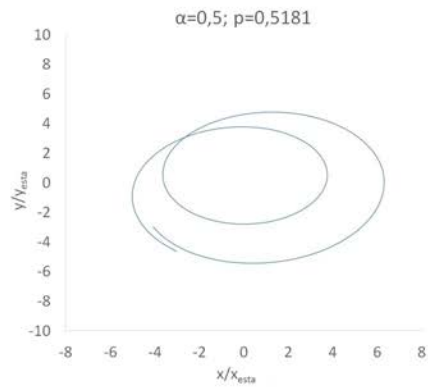


Figura 4.94: Desplazamiento en la dirección y para el caso $\alpha = 0.5$, $\theta = 0^\circ$ y $p = 0.2651$.

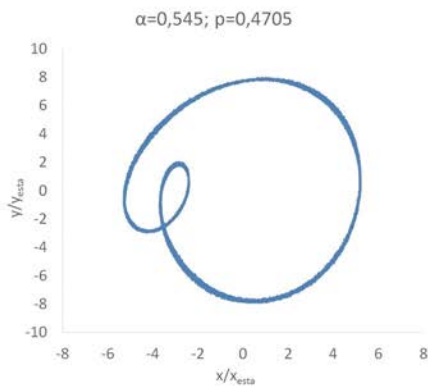
4.1.4 *Validación del modelo numérico*

Con el objetivo de validar el modelo numérico, se comparan los resultados obtenidos con los alcanzados experimentalmente mostrados en el Capítulo 3 así como otros resultados de la bibliografía [37]. Para la validación se ha elegido un valor de la posición de la masa excéntrica $\theta = 0^\circ$. Dado lo dificultoso en tiempo de cálculo y las dificultades del desarrollo experimental se van a comparar ejes con fisuras con profundidad similar, en concreto, en los resultados experimentales $\alpha = 0.545$ y en los numéricos $\alpha = 0.5$. En las figuras 4.95, 4.96 y 4.97, se representan los resultados numéricos, experimentales y de la literatura que permiten validar el modelo.

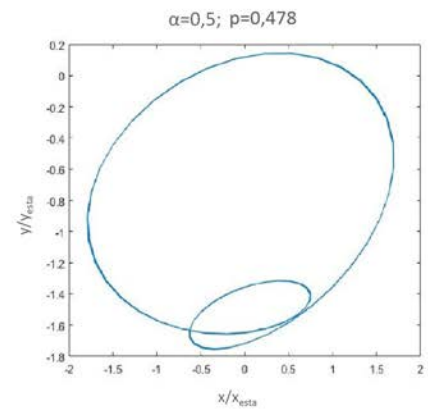
En estas figuras, se han representado las órbitas correspondientes a velocidades muy próximas a $\frac{1}{2}\omega_c$, $\frac{1}{3}\omega_c$, y $\frac{1}{4}\omega_c$. Todos los resultados que se muestran son adimensionales.



(a) Numérico

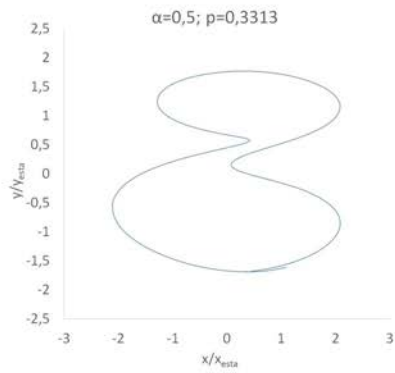


(b) Experimental

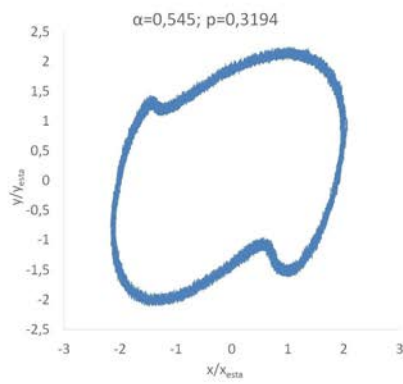


(c) [37]

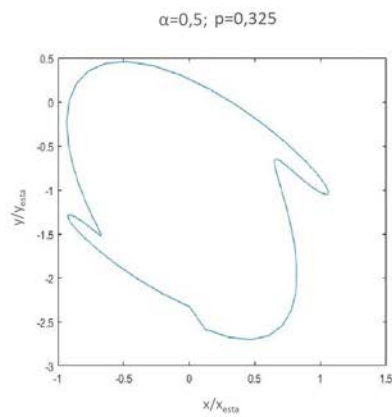
Figura 4.95: Comparación de los resultados numéricos con los experimentales y con los numéricos en [37] para $p \approx 0.5$.



(a) Numérico

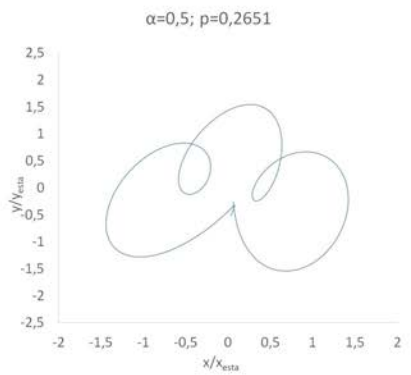


(b) Experimental

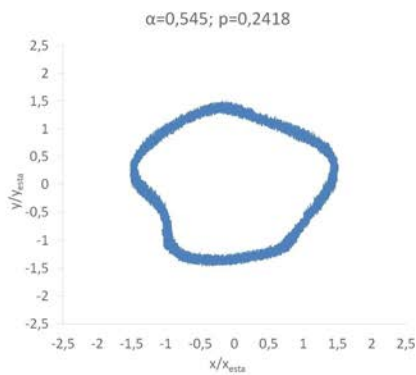


(c) [37]

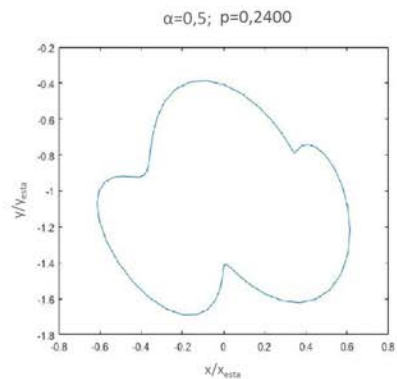
Figura 4.96: Comparación de los resultados numéricos con los experimentales y con los numéricos en [37] para $p \approx 0.33$.



(a) Numérico



(b) Experimental



(c) [37]

Figura 4.97: Comparación de los resultados numéricos con los experimentales y con los numéricos en [37] para $p \approx 0.25$.

Teniendo en cuenta el número de lazos, en las gráficas se puede ver como en todos los casos comparados el número de lazos interiores que presentan las órbitas es el mismo para cada velocidad de giro. Es decir, que cuando el sistema rotor gira en torno a $\frac{1}{2}\omega_c$, $\frac{1}{3}\omega_c$, o $\frac{1}{4}\omega_c$, las órbitas presentarán uno, dos y tres lazos interiores respectivamente. Y como se puede observar, este número coincide con los resultados mostrados en las figuras anteriores.

En estas figuras se observa que el tamaño de los lazos de las órbitas, obtenidas numéricamente con el modelo presentado en esta Tesis, son mayores que las obtenidas experimentalmente y en [37]. Esto se debe a que, como se vió en el capítulo 2, a medida que aumenta la frecuencia natural del sistema rotor intacto, aumentan los desplazamientos y por tanto el tamaño de la órbita será mayor independientemente del tamaño de la fisura (ver figura 2.29). En este caso, aunque la profundidad de fisura es similar, el valor de la velocidad crítica en el caso numérico del presente trabajo es mayor que en los otros dos casos a comparar, y por ello, el tamaño de las órbitas es mayor.

Por tanto, teniendo en cuenta los resultados obtenidos y la concordancia con los resultados experimentales y con los obtenidos en la bibliografía, se concluye que el modelo numérico desarrollado en esta Tesis Doctoral es válido.

Para el caso de una velocidad distinta de la subcrítica, se ha simulado un caso a una velocidad superior a $\frac{1}{2}\omega_c$ pero inferior a la crítica.

En la figura 4.98 (a) se muestran los resultados obtenidos para $\alpha = 0.5$, $\theta = 0^\circ$ y una velocidad de giro distinta de las subcríticas de valor $p=0.7$.

Para esta velocidad de giro, se observa que la órbita es parecida a la de $\frac{1}{2}\omega_c$, ya que presenta un lazo interior. La diferencia con respecto a la órbita de dicha velocidad es que el lazo adquiere forma de "corazón" y en este caso para completar la órbita se necesitan dos vueltas (representadas en dos colores distintos).

Se ha comprobado que los resultados obtenidos en [37] son similares (ver figura 4.98 (b)), lo que permite validar el modelo también para velocidades distintas de las subcríticas.

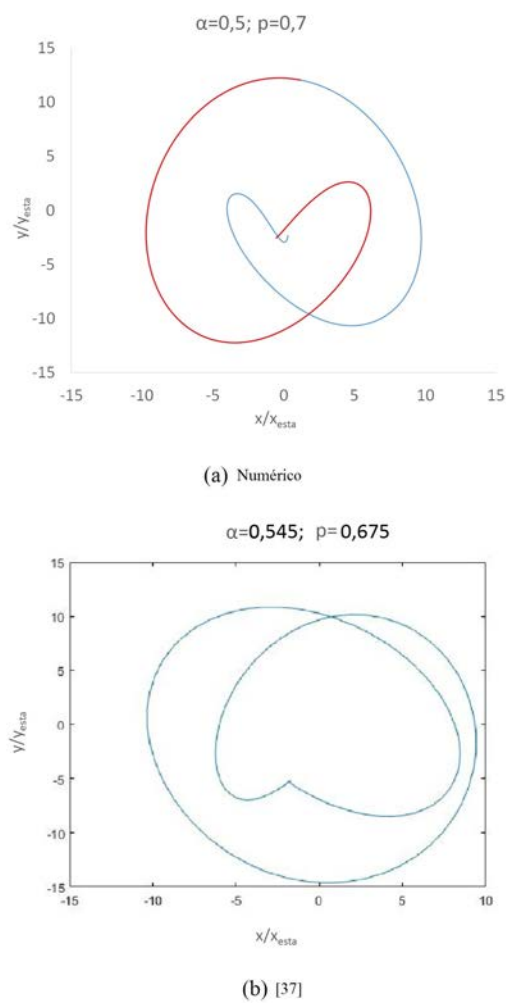


Figura 4.98: Comparación de los resultados para $p = 0.7$. (a) Numérico. (b) Numérico en [37].

4.2 ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS NUMÉRICOS

Una vez realizadas las simulaciones descritas anteriormente, se extraen resultados y se procede a su análisis. En este caso, se obtienen los desplazamientos horizontales y verticales, con el objetivo de representar la órbita descrita por la sección fisurada del eje en una vuelta completa. En la figura 4.99 se representan los desplazamientos en las direcciones horizontales (parte inferior) y verticales

(parte superior) para las 16 vueltas completas simuladas. Se observa como a partir de la vuelta número 13 los desplazamientos se estabilizan, representándose la órbita a partir de ese momento.

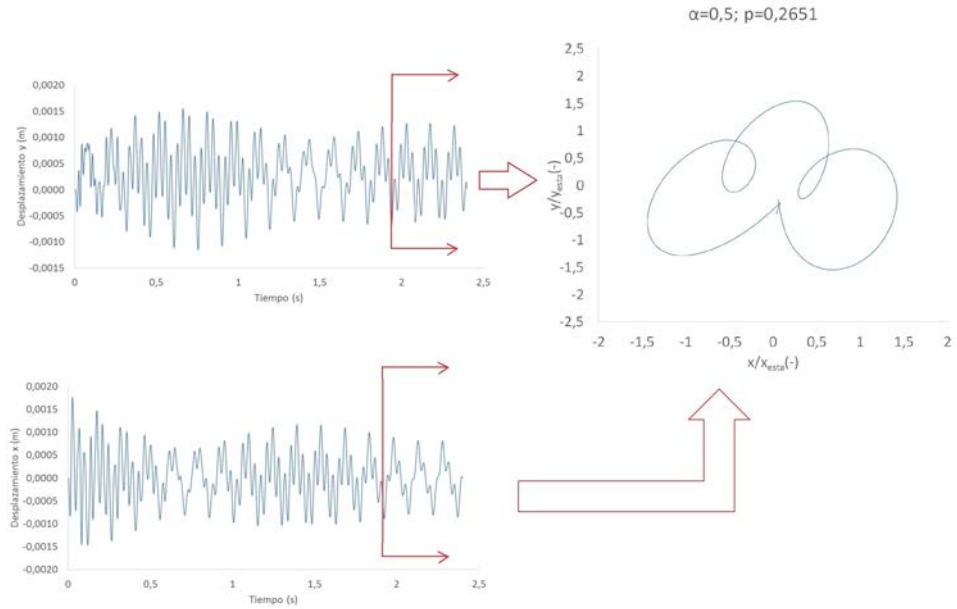


Figura 4.99: Generación de la órbita a partir de los desplazamientos.

4.2.1 *Influencia de la profundidad de la fisura en velocidades críticas*

A partir del análisis de las órbitas en velocidades próximas a $\frac{1}{2}\omega_c$, $\frac{1}{3}\omega_c$ y $\frac{1}{4}\omega_c$ de la velocidad crítica, se ha observado una relación entre el tamaño de la órbita y de los lazos que presenta, y la profundidad de la fisura. En la figura 4.100 se representan las órbitas correspondientes a dos tamaños de fisura distintos, $\alpha = 0.25$ y $\alpha = 0.5$ para una velocidad de giro $p = 0.2651$ ($\approx \frac{1}{4}\omega_c$) y una orientación de la excentricidad con respecto a la fisura de $\theta = 0^\circ$. En ambos casos el número de lazos que presenta la órbita en $p \approx \frac{1}{4}$ es tres.

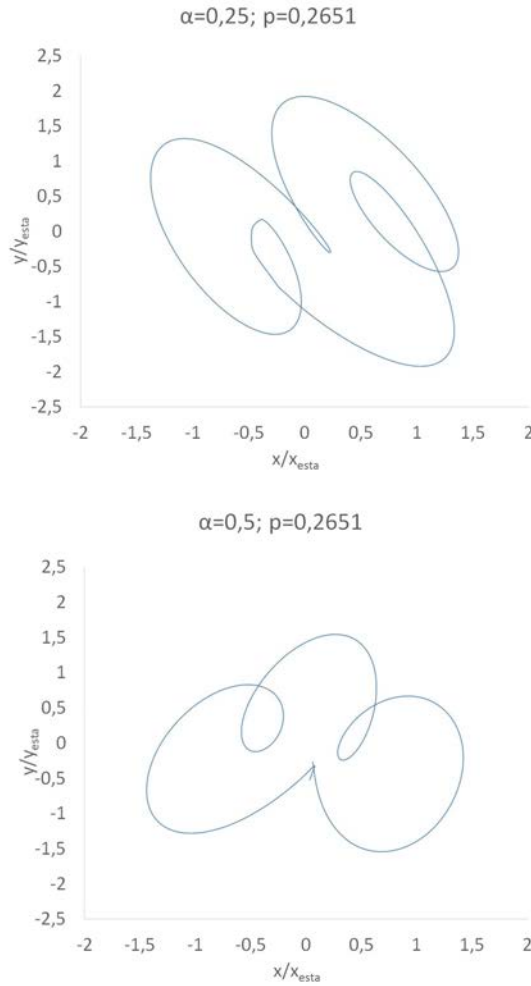


Figura 4.100: Órbitas de una vuelta de la simulación numérica para $p = 0.2651$ y $\alpha = 0.25$ y $\alpha = 0.5$.

Se observa que el tamaño de la órbitas y/o de los lazos para un eje con una profundidad de fisura $\alpha = 0.25$ es mayor que para $\alpha = 0.5$. La razón de esto se basa en que

- El tamaño de la órbita descrita por un eje fisurado en un barrido de velocidades próximo a $\frac{1}{n}\omega_c$ aumenta a medida que la velocidad se acerca a $\Omega = \frac{1}{n}\omega_c$ del propio eje fisurado, siendo máximo cuando se alcanza dicha velocidad crítica.
- La velocidad crítica de un eje disminuye a medida que aumenta la profundidad de fisura (ver apartado 2.2), por lo que si llamamos $p_{0,25}$ a la velocidad

crítica de un eje con tamaño de fisura $\alpha = 0.25$ y $p_{0.5}$ a la velocidad crítica de un eje con tamaño de fisura $\alpha = 0.5$, entonces $p_{0.5} < p_{0.25}$.

Dado que la velocidad de giro en la que se están analizando los resultados, ($p = 0.2651$) es mayor que $\frac{1}{4}\omega_c$ del eje intacto ($p_c = 0.25$), p es más próxima a $p_{0.25}$ que a $p_{0.5}$, es decir, $p_{0.5} < p_{0.25} < p_c < p$. Por tanto, el tamaño de la órbita de $\alpha = 0.25$ será mayor que $\alpha = 0.5$ al ser p una velocidad de giro más próxima a su crítica, a pesar de tener un tamaño de fisura menor.

De forma general este hecho se ilustra a continuación mediante un esquema explicativo (ver figura 4.101) donde se representan a modo de ejemplo las órbitas descritas por un mismo sistema rotor a una velocidad de giro $p \approx \frac{1}{2}$ y para dos tamaños de fisura α_1 y α_2 , siendo $\alpha_1 < \alpha_2$. Para α_1 la órbita es máxima en p_1 y para α_2 lo es en p_2 , siendo estas velocidades, las críticas de cada eje fisurado y por tanto $p_2 < p_1$. En el caso de que la velocidad de giro sea $p > p_c$ se puede ver como el tamaño de la órbita y el lazo interior es mayor para el caso de α_1 en comparación con α_2 , por ser p_1 más próxima a p que p_2 , al igual que en los resultados numéricos presentados anteriormente.

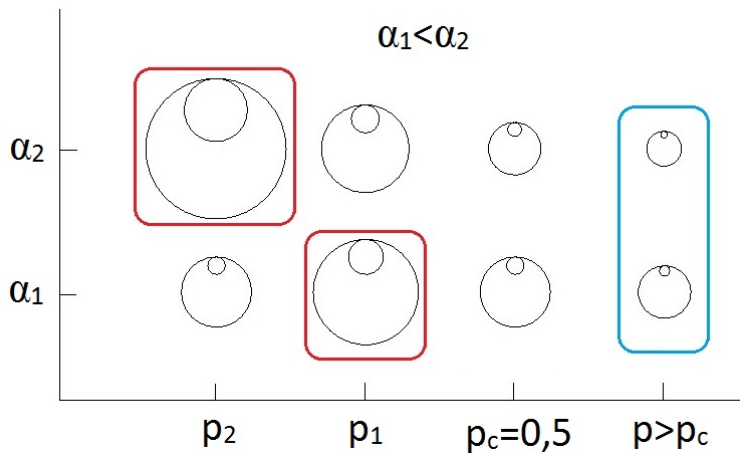


Figura 4.101: Variación de la órbita en función de la velocidad de giro y el tamaño de la fisura.

Del mismo modo, en las figuras 4.102 y 4.103 se representan las órbitas correspondientes a dos tamaños de fisura distintos, $\alpha = 0.25$ y 0.5 , para $p = 0.3313$ y $p = 0.5181$, respectivamente y una orientación de la excentricidad con respecto a la fisura de $\theta = 0^\circ$.

Independientemente de la velocidad de giro, el tamaño de la órbitas y/o de los lazos es mayor para un tamaño de fisura menor dado que se están comparando los resultados a la misma velocidad de giro y ésta es más próxima a la velocidad crítica del eje fisurado con menor α (ver figura 4.101).

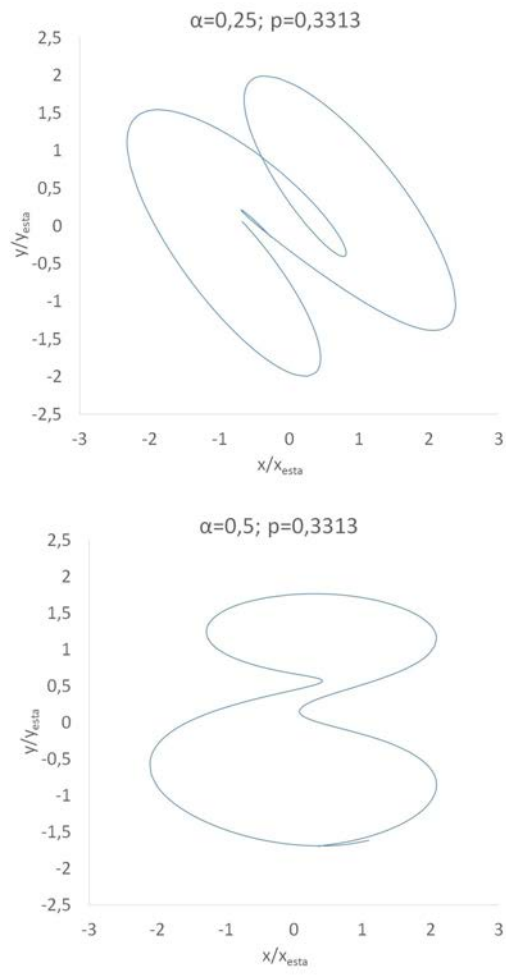


Figura 4.102: Órbitas de una vuelta de la simulación numérica para $p = 0.3313$ y $\alpha = 0.25$ (izquierda) y 0.5 (derecha).

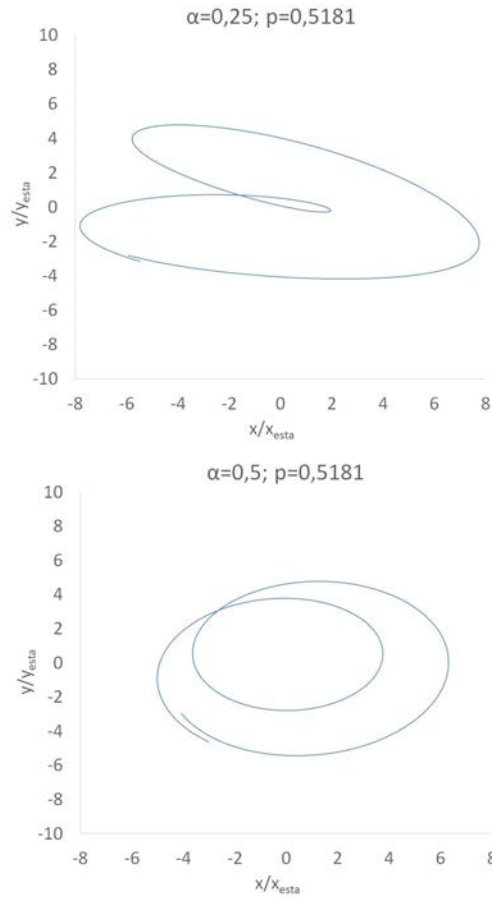


Figura 4.103: Órbitas de una vuelta de la simulación numérica para $p = 0.5181$ y $\alpha = 0.25$ (izquierda) y 0.5 (derecha).

4.2.2 Influencia de la orientación de la masa excéntrica

En este apartado se pretende estudiar cómo afecta la orientación de la masa excéntrica en los resultados de las órbitas.

En la figura 4.104, se muestran las órbitas descritas por el punto central de la sección fisurada del eje para un tamaño de fisura de $\alpha = 0.5$, una velocidad de giro $p = 0.5181$ y distintas orientaciones de la masa excéntrica $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ y 90° .

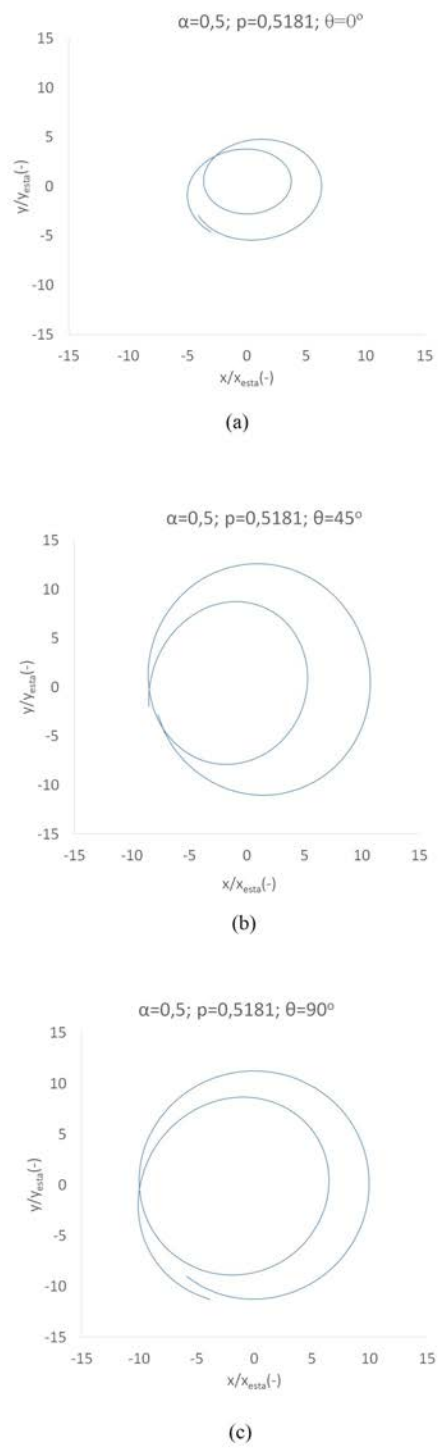


Figura 4.104: Influencia de θ en las órbitas. (a) $\theta = 0^\circ$, (b) $\theta = 45^\circ$ y $\theta = 90^\circ$.

Se observa que, independientemente de la orientación de la masa excéntrica, el número de lazos es el mismo, uno, ya que la velocidad es próxima a $\frac{1}{2}\omega_c$. Sin embargo, los tamaños de la órbita y del lazo se incrementan según aumenta el ángulo de la posición de la masa excéntrica, siendo mayor el lazo para el caso de $\theta = 90^\circ$. A una misma velocidad de giro, un tamaño de órbita mayor en un eje indica que la velocidad crítica de ese eje es mayor. Por tanto, se puede decir que cuando la orientación de la excentricidad es de $\theta = 90^\circ$, el eje se comporta como si tuviera un tamaño de fisura menor con respecto a un eje con orientaciones de la masa excéntrica de $\theta = 0^\circ$ y $\theta = 45^\circ$. Esto está en concordancia con los resultados obtenidos experimentalmente (ver capítulo 3 figura 3.81).

DETERMINACIÓN DEL FIT EN EJES FISURADOS GIRATORIOS

En este capítulo se ha calculado el FIT en todo el frente de fisura a partir de los desplazamientos de las caras de la fisura obtenidos mediante el modelo numérico dinámico tridimensional desarrollado en el capítulo 4 de la presente Tesis Doctoral. Una vez calculado el FIT se analiza la influencia de la profundidad de la fisura y la orientación de la masa excéntrica sobre este parámetro, y se realiza una comparación entre el FIT obtenido de un modelo cuasiestático y el FIT dinámico.

5.1 CONSIDERACIONES INICIALES PARA EL CÁLCULO DEL FIT

A la hora de realizar el cálculo del FIT se tienen en cuenta algunas consideraciones previas. El código comercial Abaqus en su versión Abaqus/Standard incluye un módulo específico para el análisis de fractura y en particular para el cálculo del FIT. Este módulo, denominado *crack*, permite definir el frente de fisura y la dirección de propagación de la misma, así como calcular el valor del FIT en cada punto definido del frente (γ). Sin embargo, la versión Abaqus/Explicit no incluye el módulo *crack*, por lo que el cálculo del FIT en condiciones dinámicas de giro debe ser obtenido haciendo uso de los métodos analíticos tradicionales basados en la Mecánica de la Fractura, como se verá en el siguiente apartado.

Para el cálculo del FIT, se han tomado quince valores de la posición relativa en el frente de fisura γ , desde -0.875 hasta 0.875 en intervalos de 0.125 (ver figura 5.105). No se tienen en cuenta los puntos situados en la superficie del eje, correspondientes a $\gamma = 1$ y $\gamma = -1$ debido a que el orden de la singularidad en este punto exterior podría no ser igual a $\frac{-1}{2}$ [68], [69] y [70].

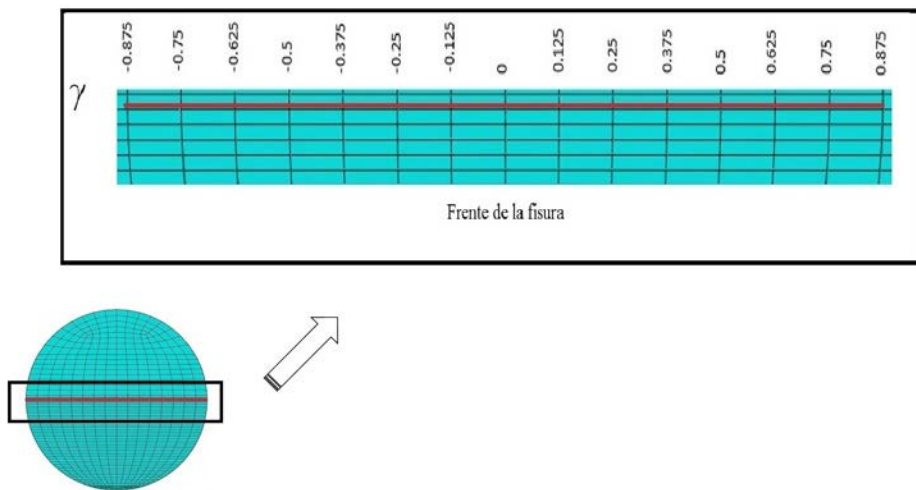


Figura 5.105: Posiciones en el frente de fisura (γ) analizadas en el modelo numérico.

5.2 MÉTODO DE CÁLCULO DEL FIT A PARTIR DE LOS DESPLAZAMIENTOS

El método para obtener el FIT utilizado en el presente trabajo consiste en calcular el FIT a partir de los desplazamientos relativos de los puntos de las caras de la fisura (CTOD) [49]. Este parámetro proporciona una medida del tamaño de la apertura del frente de la fisura y se puede expresar como:

$$CTOD = 2u_z \tag{5.16}$$

donde u_z es el desplazamiento en dirección z en el fondo de una fisura en modo I y están relacionados con el FIT mediante la expresión 5.17:

$$u_z = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin \frac{\eta}{2} \left(\kappa + 1 - \cos^2 \frac{\eta}{2} \right) \tag{5.17}$$

donde $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ y $\kappa = 3 - 4\nu$ en condiciones de deformación plana.

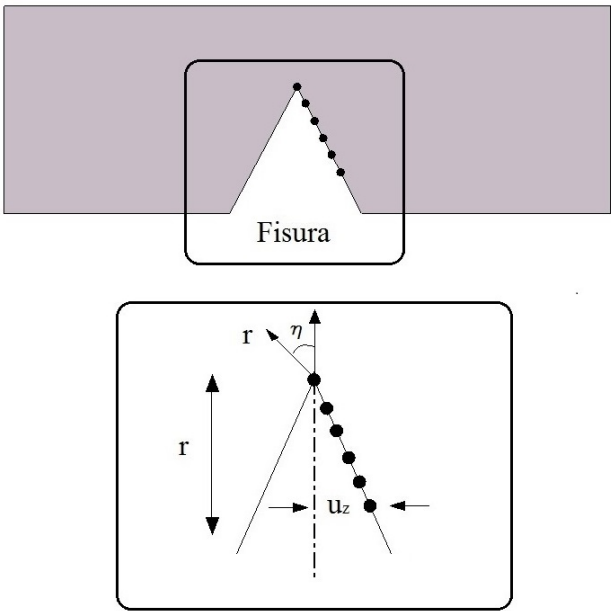


Figura 5.106: Detalle de los desplazamientos en la fisura.

Se han obtenido los desplazamientos u_z de las caras que constituyen la fisura para cada γ en puntos situados a diferentes distancias en la dirección r , medidas desde el frente de fisura y particularizando la expresión anterior para $\eta = 180^\circ$. En la figura 5.106 se muestra un esquema de la zona de la fisura donde se representan los puntos en los que se obtienen los desplazamientos. El cálculo del FIT, a parte de las propiedades del material, requiere conocer el valor de $\frac{u_z}{\sqrt{r}}$, que se ha obtenido para cada uno de los puntos del frente de fisura, γ . A modo de ejemplo para una posición de giro $\phi = 315^\circ$ de un eje con un tamaño de fisura $\alpha = 0.25$ y una orientación de la masa excéntrica $\theta = 0^\circ$, se obtiene el valor del desplazamiento u_z para cada r y se representa la recta u_z frente a r , en la que el valor buscado es la pendiente (ver figura 5.107).

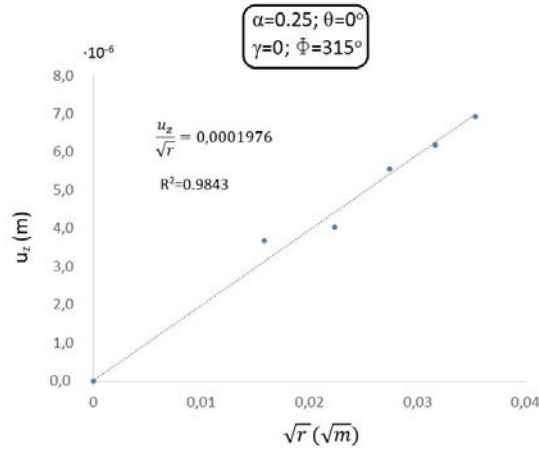


Figura 5.107: Cálculo de $\frac{u_z}{\sqrt{r}}$ para $\gamma = 0$, $\phi = 315^\circ$, $\alpha = 0.25$, $\theta = 0^\circ$.

El procedimiento se repite para cada γ y para cada ϕ obteniéndose K_I de la siguiente manera:

$$K_I = \frac{2\mu \cdot \sqrt{2\pi}}{(3 - 4\nu + 1)} \cdot \frac{u_z}{\sqrt{r}} \quad (5.18)$$

El FIT adimensional se obtiene a partir de la siguiente ecuación:

$$F_I = \frac{K_I}{\sigma\sqrt{\pi a}} \quad (5.19)$$

donde σ es la tensión de referencia $\sigma = \frac{32M}{\pi D^3}$, M momento flector y D el diámetro del eje.

5.3 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS DEL FIT

Después de realizar las simulaciones descritas anteriormente, se extraen resultados de los desplazamientos de todos los puntos del frente de fisura en el eje longitudinal para así poder calcular el Factor de Intensidad de Tensiones (FIT), como se ha descrito anteriormente (ver apartado 5.2) y se procede a su análisis.

En la figura 5.108, se muestra a modo de ejemplo el valor del FIT para siete puntos del frente de fisura a lo largo de toda la simulación. Los valores representados se corresponden con el caso de $\alpha = 0.5$, $\theta = 0^\circ$ y $p = 0.2651$. Se puede ver como el valor del FIT varía hasta que a partir de la vuelta número 13 se estabiliza. Por ello y como se verá a continuación, se muestran únicamente los resultados de la última vuelta en cada uno de los casos analizados.

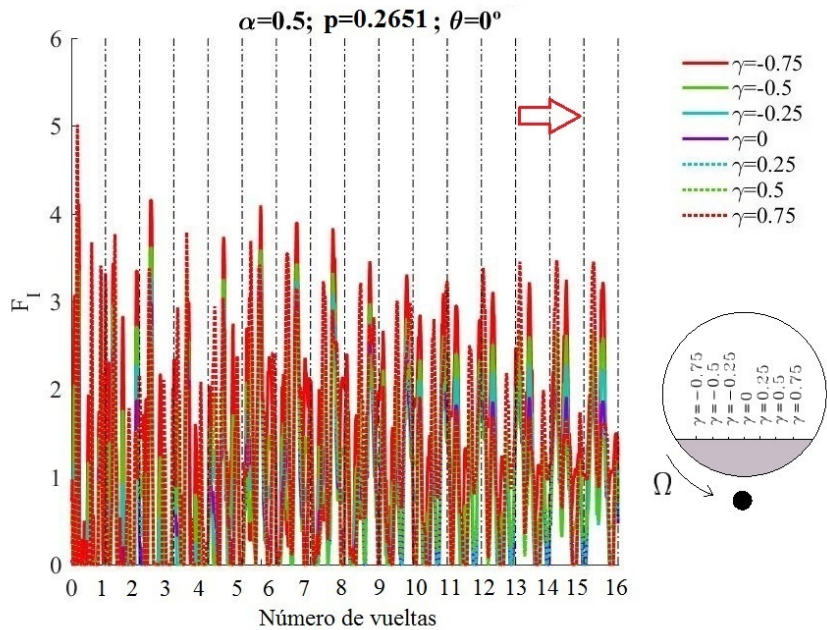


Figura 5.108: Factor de Intensidad de Tensiones a lo largo de toda la simulación numérica para el caso $\alpha = 0.5$, $\theta = 0^\circ$ y $p = 0.2651$.

Dado que las velocidades de interés son $\frac{1}{2}\omega_c$, $\frac{1}{3}\omega_c$ y $\frac{1}{4}\omega_c$ el análisis del FIT se ha llevado a cabo en dichas velocidades.

5.4 ANÁLISIS DEL FIT

5.4.1 *Influencia de la profundidad de la fisura*

En las figuras 5.109 y 5.110 se muestran los resultados del FIT obtenidos para $\alpha = 0.25$ y 0.5 a una velocidad de giro $p = 0.2651$ y posición de la masa excéntrica de $\theta = 0^\circ$. Con el objetivo de relacionar el FIT con las órbitas en estas figuras se representan conjuntamente la órbita (en la parte superior) y el valor del FIT para una vuelta y para algunos de los puntos del frente de fisura. Además, se muestra la posición de la fisura (en gris) cada $\Delta\phi = 45^\circ$ de giro del eje.

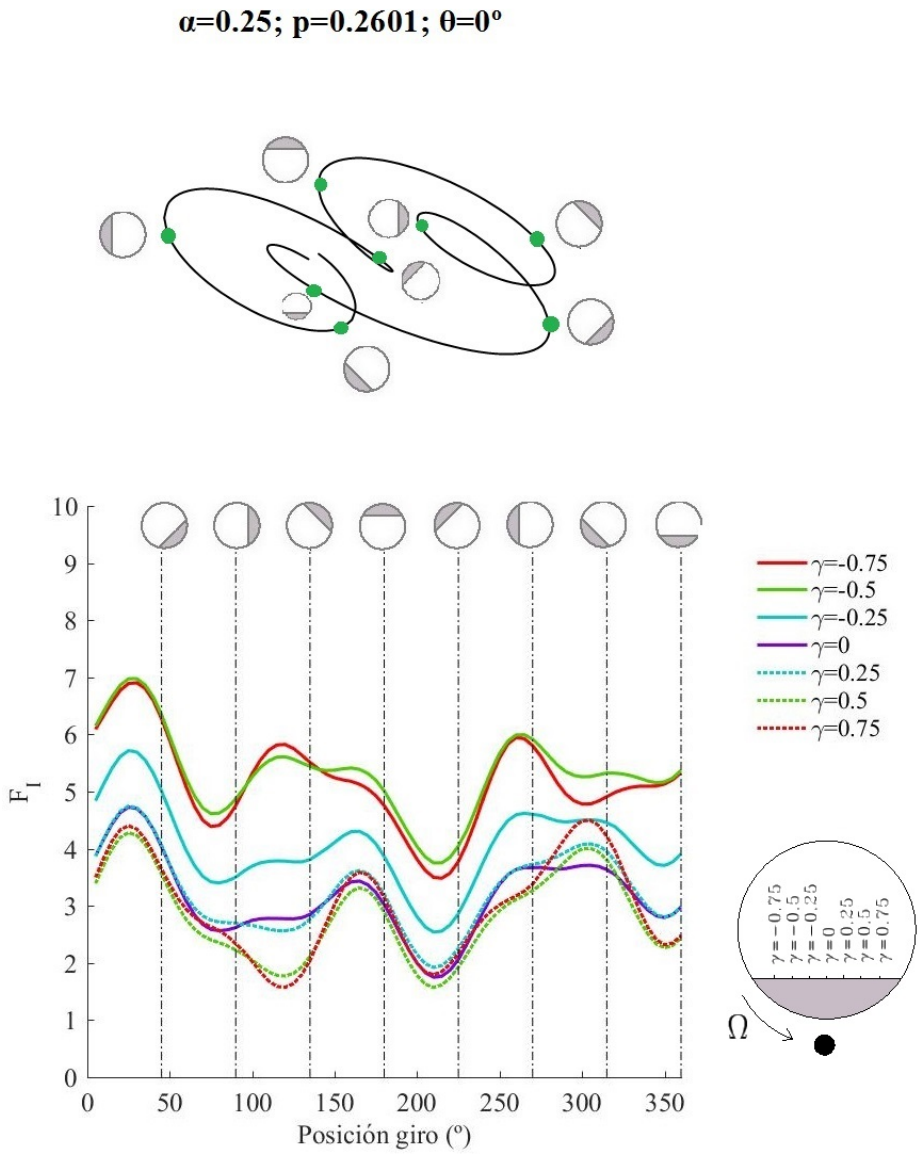


Figura 5.109: Influencia profundidad de fisura. Órbita y FIT para $\alpha = 0.25$, $p = 0.2601$ y $\theta = 0^\circ$.

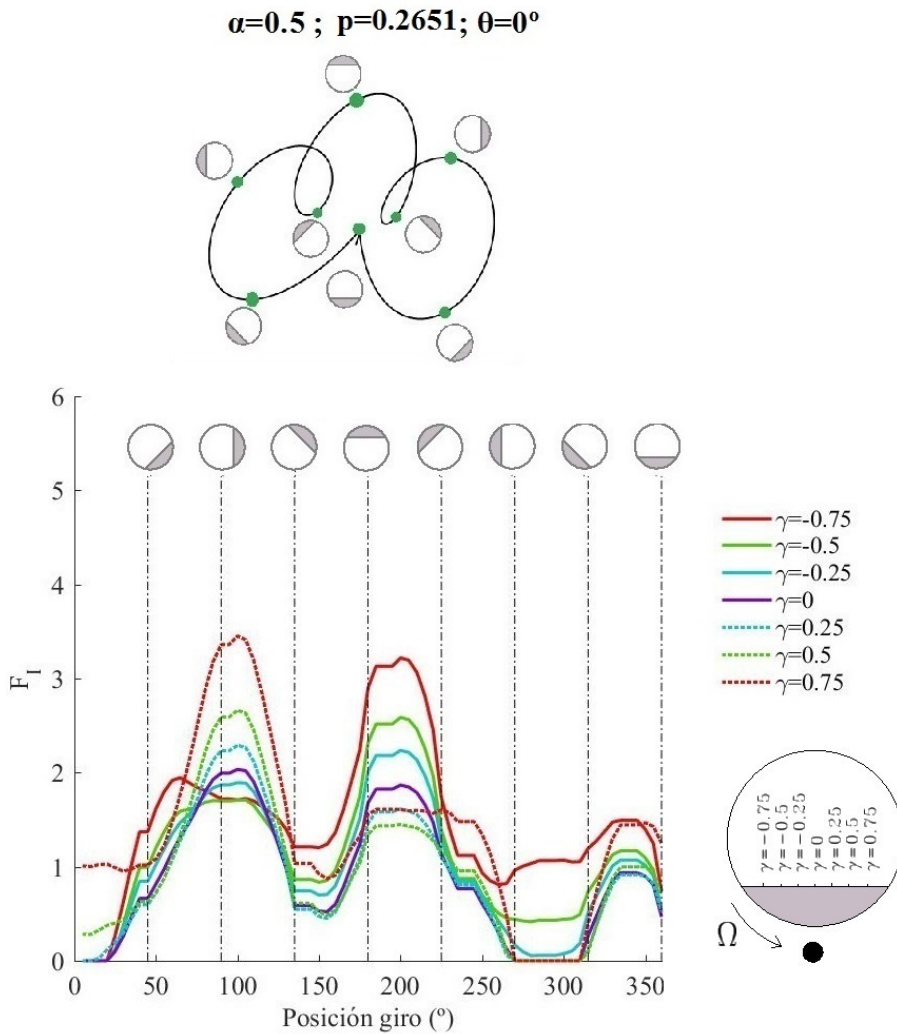


Figura 5.110: Influencia profundidad de fisura. Órbita y FIT para $\alpha = 0.5$, $p = 0.2601$ y $\theta = 0^\circ$.

Se hace necesario recordar que cuando el FIT es positivo en todos los puntos del frente de fisura, esta se encuentra abierta, y cuando el FIT es cero en todo el frente de fisura, se encuentra cerrada. Cuando los valores en unos puntos del frente son positivos y en otros cero, la fisura se encuentra parcialmente abierta y cerrada.

Se puede ver como independientemente de la profundidad de fisura para una velocidad de giro $p = 0.2651$ el FIT en una vuelta aumenta y disminuye tres veces en todos los puntos del frente de fisura, pero la fisura nunca llega a cerrarse por

completo. En este caso el número de veces que aumenta y disminuye coincide con el número de lazos interiores que presenta la órbita ($\frac{1}{4}\omega_c$; 3 lazos interiores).

Se observa que dependiendo de la posición de la fisura en el whirling, en cada caso, los lazos de las órbitas se producen en diferentes posiciones de giro del eje. Como ejemplo, se puede ver como en $\alpha = 0.25$ las posiciones en las que se producen lazos interiores en la órbita son $\phi = 90^\circ$, $\phi = 225^\circ$ y $\phi = 360^\circ$. Y en el caso de $\alpha = 0.5$ se producen lazos interiores en $\phi = 135^\circ$, $\phi = 225^\circ$ y $\phi = 360^\circ$.

En relación con la apertura y cierre de la fisura se observa que también dependiendo de la posición de la fisura en el whirling, la fisura puede permanecer más abierta en unos puntos del frente de fisura que en otros. Por ejemplo si se observa la posición de giro $\phi = 90^\circ$ para $\alpha = 0.25$ en este caso el eje se encuentra describiendo un lazo de la órbita y los puntos del frente que permanecen más abiertos son los negativos, mientras que en $\alpha = 0.5$ en esa misma posición de giro el eje no se encuentra dentro de ningún lazo y los puntos que permanecen más abiertos son los positivos.

En cuanto a su valor, se observa que el FIT máximo para $\alpha = 0.25$ es mayor en comparación con $\alpha = 0.5$, en $\alpha = 0.25$ el FIT más alto es 7 y en $\alpha = 0.5$, 3.5. Este hecho se debe a lo comentado previamente para el tamaño de las órbitas en el apartado 4.2.1 que es aplicable al FIT.

Del mismo modo en las figuras 5.111 y 5.112 se muestran los resultados del FIT obtenidos para $\alpha = 0.25$ y 0.5 a una velocidad de giro $p = 0.3313$ y posición de la masa excéntrica de $\theta = 0^\circ$. En ellas se observan los mismos efectos explicados para $p = 0.2651$ con la diferencia de que al ser una velocidad próxima a $\frac{1}{3}\omega_c$, el número de lazos interiores en las órbitas y el número de veces que aumenta y disminuye el FIT es dos.

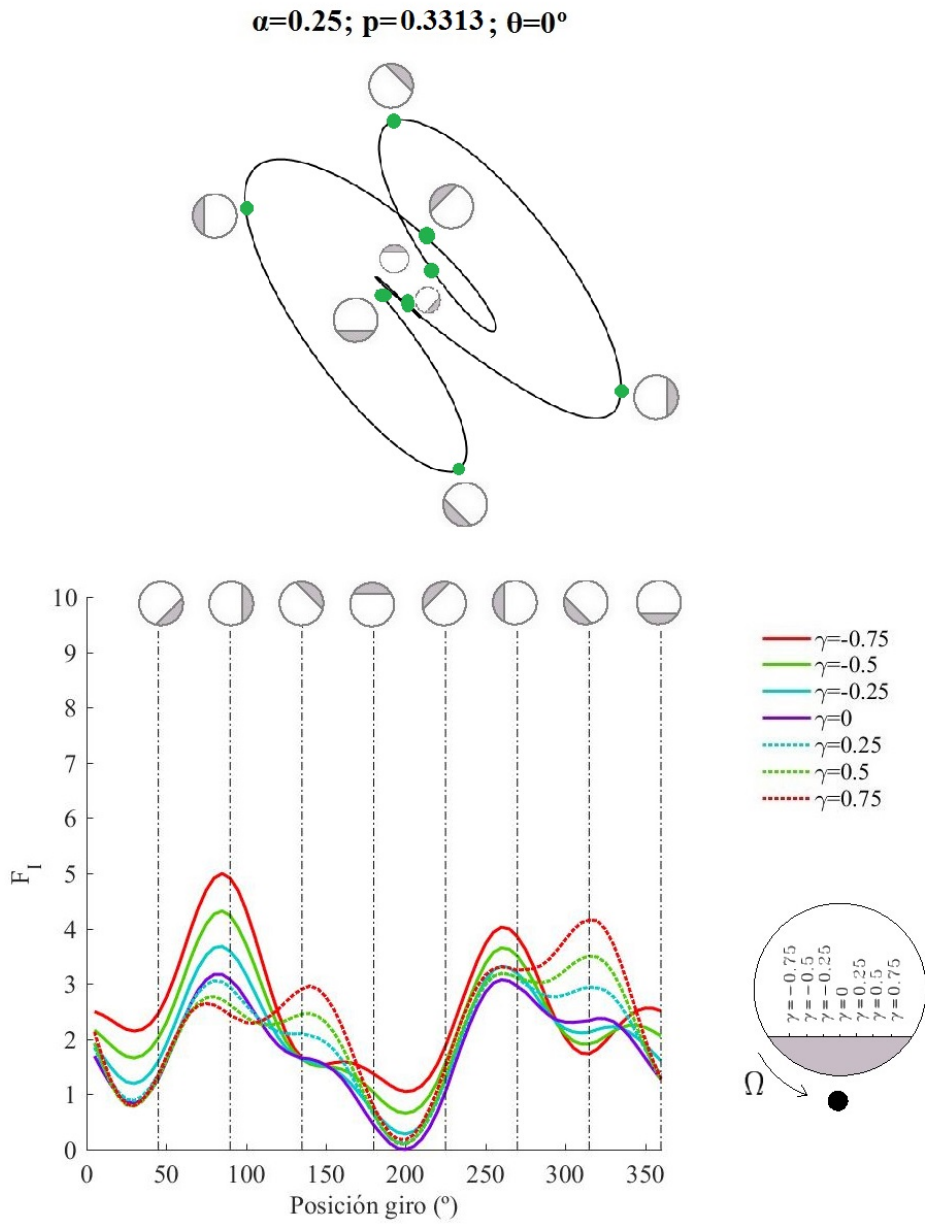


Figura 5.111: Influencia profundidad de fisura. Órbita y FIT para $\alpha = 0.25$, $p = 0.3313$ y $\theta = 0^\circ$.

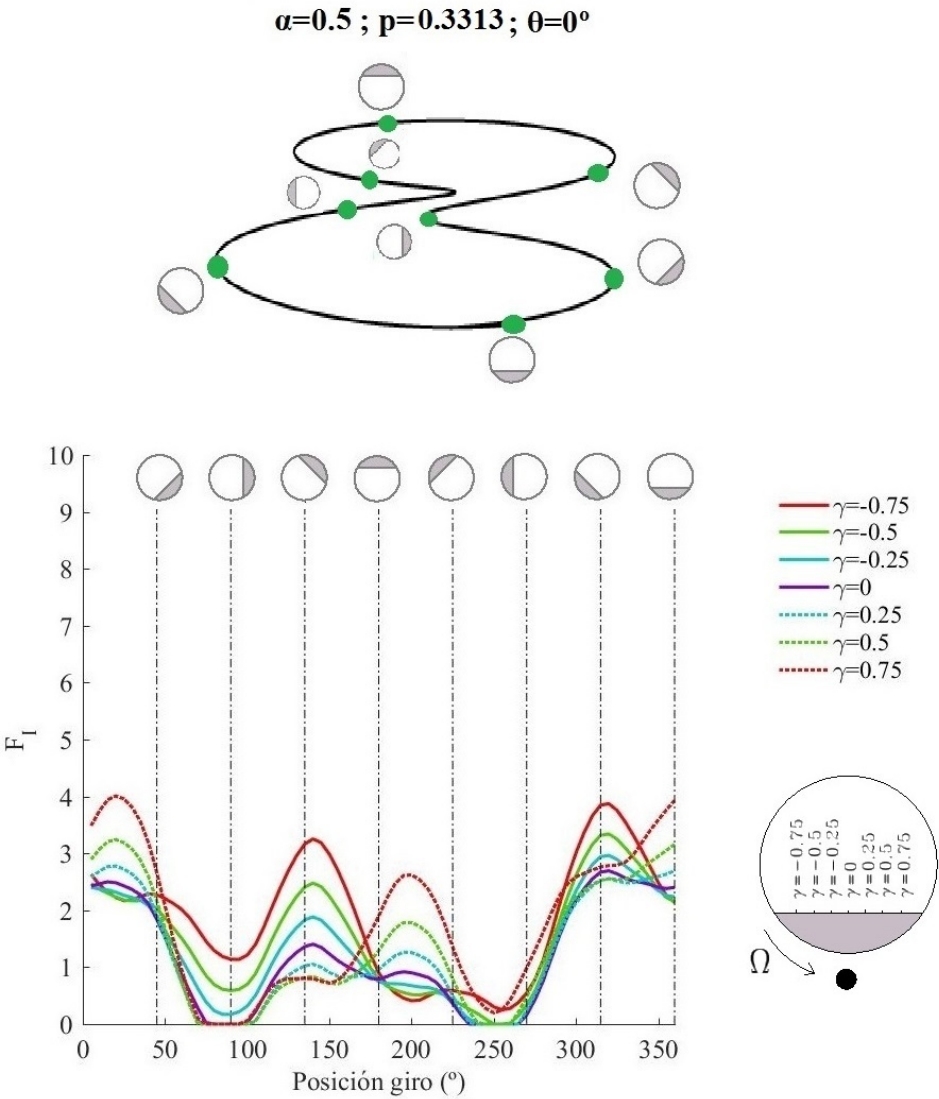


Figura 5.112: Influencia profundidad de fisura. Órbita y FIT para $\alpha = 0.5$, $p = 0.3313$ y $\theta = 0^\circ$.

En las figuras 5.113 y 5.114 se muestran los resultados del FIT obtenidos para $\alpha = 0.25$ y 0.5 a una velocidad de giro $p = 0.5181$ y posición de la masa excéntrica de $\theta = 0^\circ$. Al igual que en los casos anteriores se observan las mismas características, pero al tratarse de una velocidad de giro cercana a $\frac{1}{2}\omega_c$, el número de lazos interiores en las órbitas y el número de veces que aumenta y disminuye el FIT es uno.

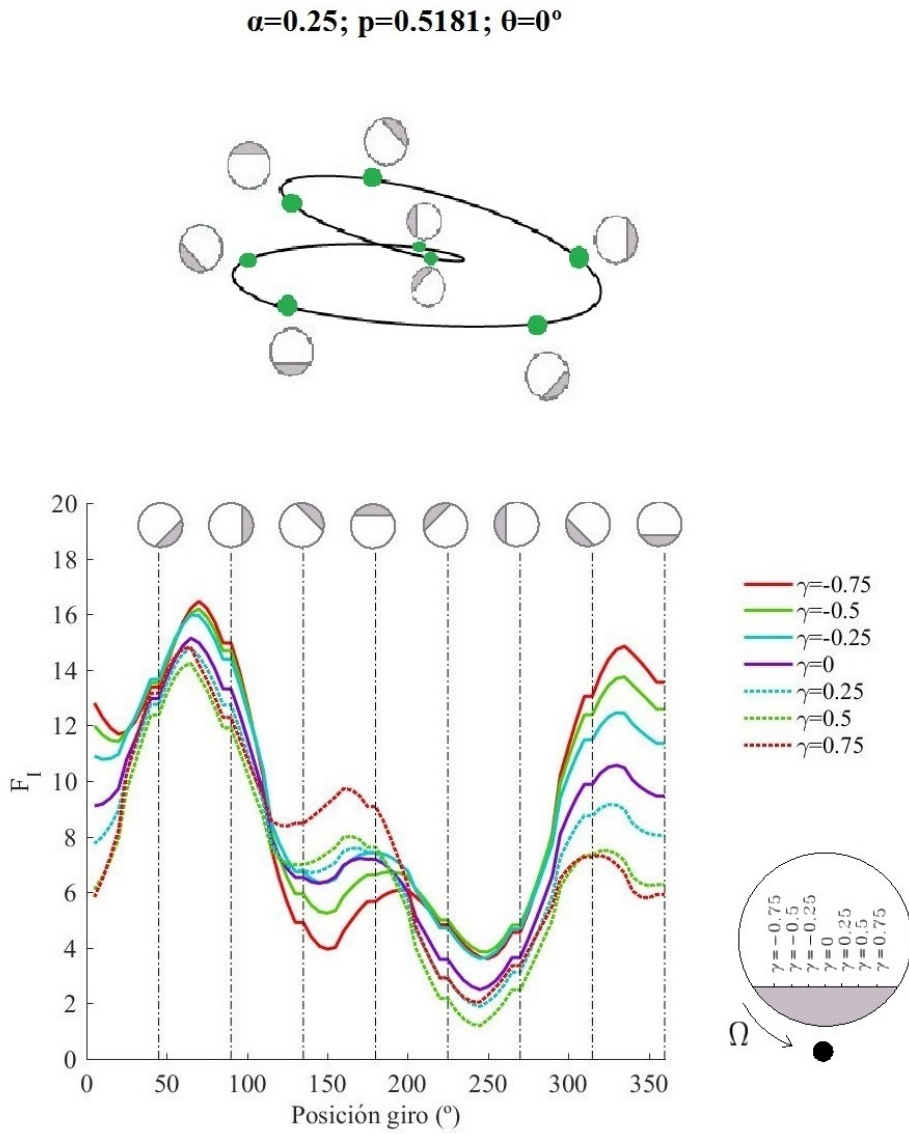


Figura 5.113: Influencia profundidad de fisura. Órbita y FIT para $\alpha = 0.25$, $p = 0.5181$ y $\theta = 0^\circ$.

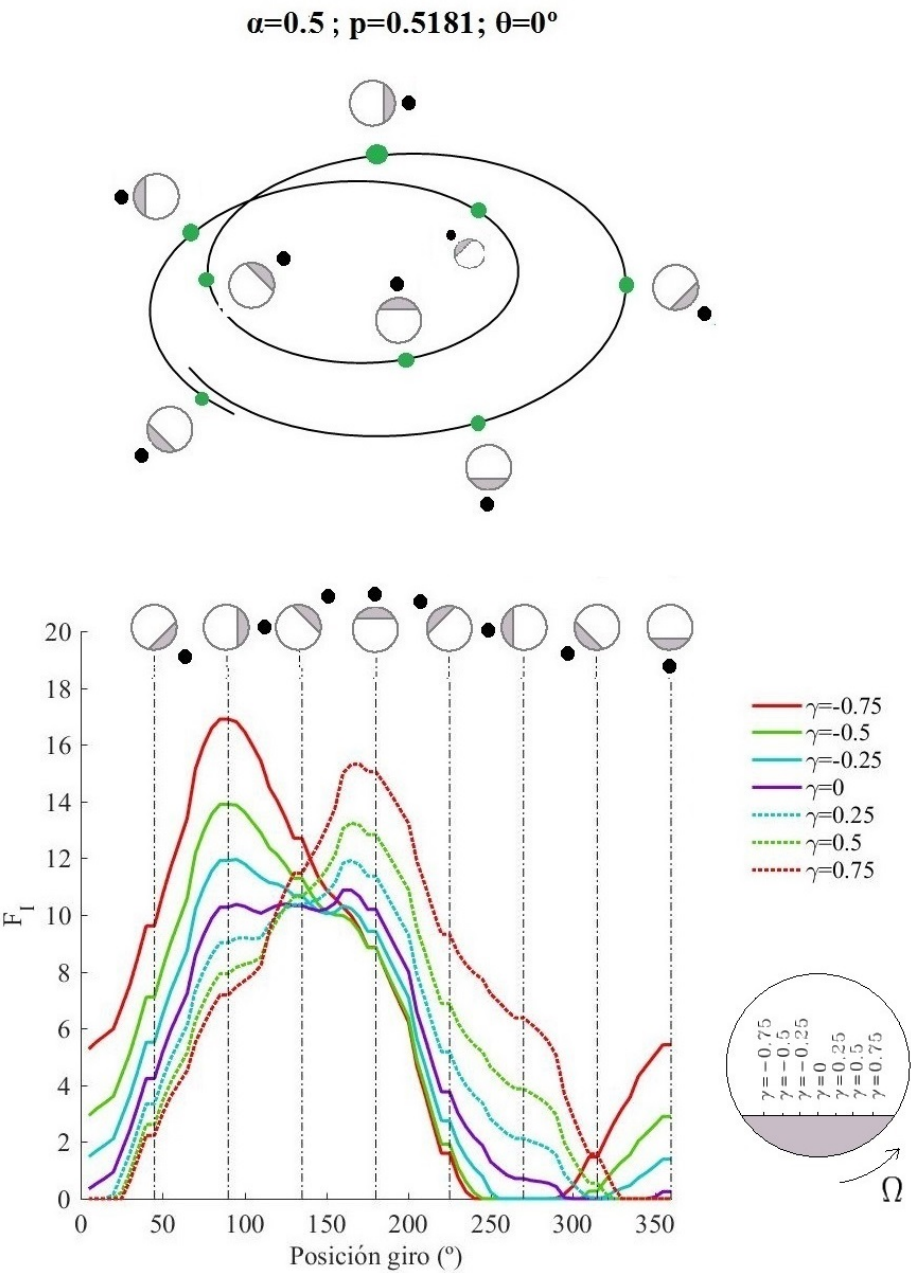


Figura 5.114: Influencia profundidad de fisura. Órbita y FIT para $\alpha = 0.5$, $p = 0.5181$ y $\theta = 0^\circ$.

A la vista de los resultados se puede decir que el tamaño de la fisura por sí mismo no permite obtener ninguna conclusión del FIT, ya que la posición de la fisura en el whirling afecta también a los resultados.

Analizando una misma profundidad de fisura se puede apreciar que, el valor del FIT aumenta a medida que aumenta la velocidad de giro, obteniéndose valores máximos de 3.5 en $p=0.2651$, 4 en $p=0.3313$ y 17 en $p=0.5181$ para el caso de $\alpha = 0.5$.

Una vez analizadas las velocidades críticas, en la figura 5.115, se pueden ver los resultados para $\alpha = 0.5$, $\theta = 0^\circ$ y una velocidad de giro distinta de las críticas de valor $p=0.7$.

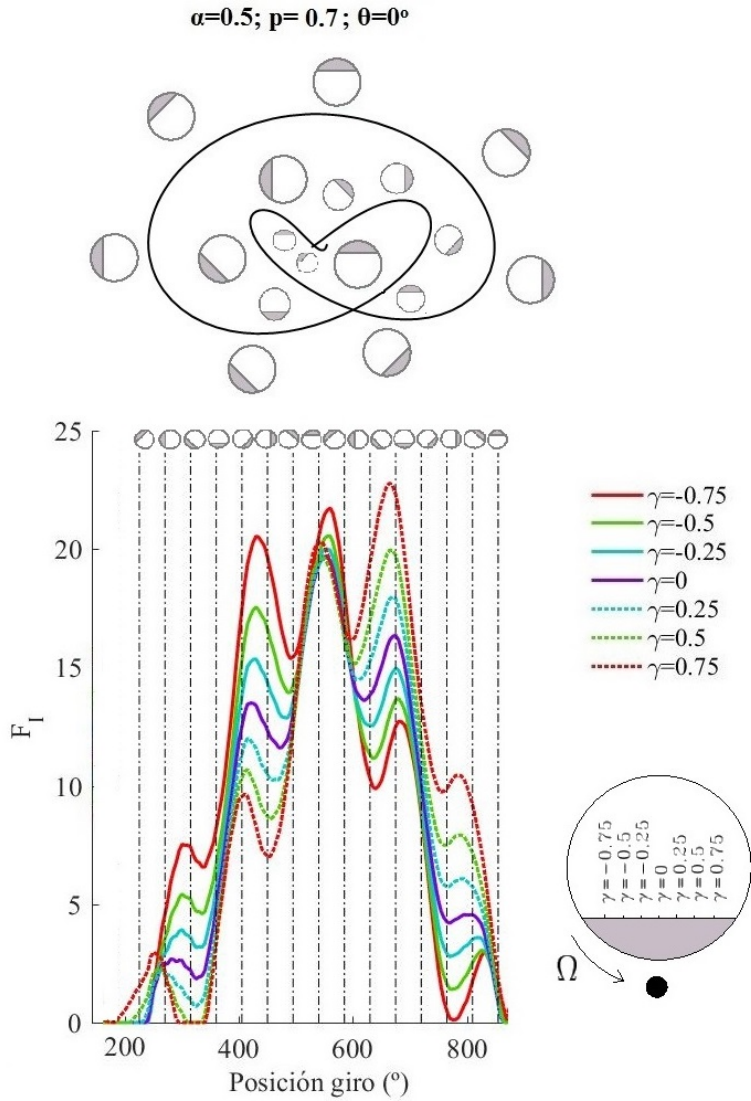


Figura 5.115: Influencia profundidad de fisura. Órbita y FIT para $\alpha = 0.5$, $p = 0.7$ y $\theta = 0^\circ$.

Como ya se comentó en el análisis de las órbitas, en este caso se necesitan dos vueltas completas del eje para completar el ciclo. A la vista de los resultados se puede decir que el FIT aumenta hasta la mitad del ciclo, siendo mayor para los puntos del frente negativos, y luego disminuye pasando a ser mayor el FIT de los puntos del frente positivos hasta que parte de la fisura se cierra. Se observa que como la órbita es simétrica, el FIT también lo es.

5.4.2 *Influencia de la orientación de la masa excéntrica*

En cuanto a la posición de la masa excéntrica con respecto a la fisura, en las figuras 5.114, 5.116 y 5.117, se muestran las órbitas junto al valor del FIT para una vuelta del eje completa. En este caso, se representan los resultados obtenidos para el caso de $\alpha = 0.5$, $p = 0.5181$ y $\theta = 0^\circ, 45^\circ$ y 90° .

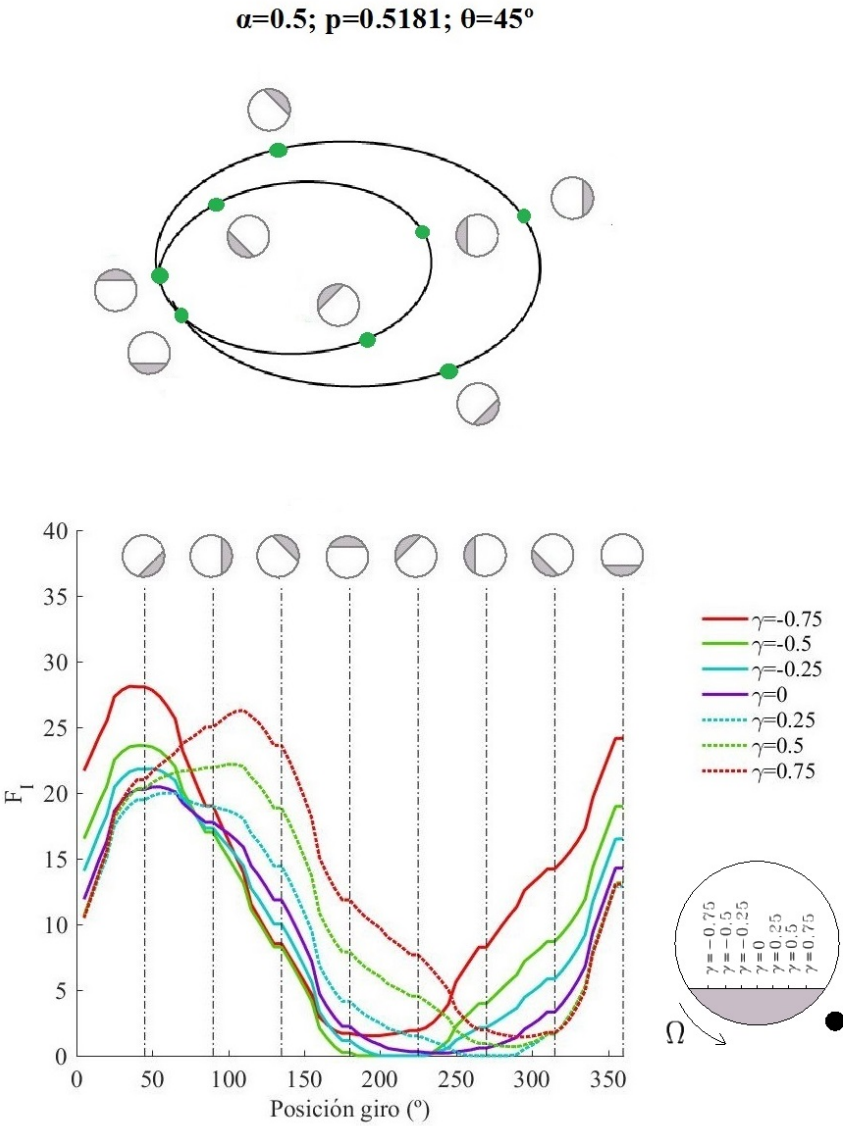


Figura 5.116: Influencia posición excentricidad. Órbita y FIT para $\alpha = 0.5$, $p = 0.5181$ y $\theta = 45^\circ$.

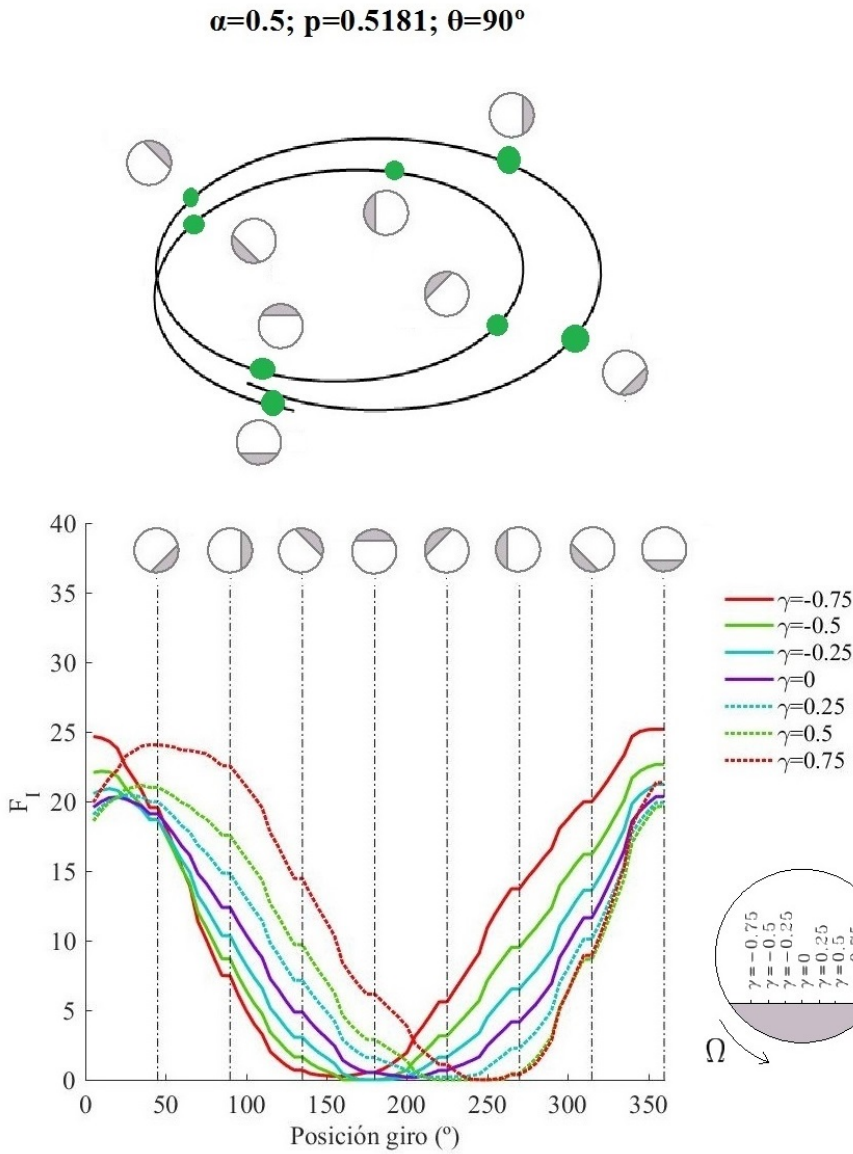


Figura 5.117: Influencia posición excentricidad. Órbita y FIT para $\alpha = 0.5$, $p = 0.5181$ y $\theta = 90^\circ$.

Comparando los tres casos analizados se observa que el ciclo de apertura y cierre es el mismo desfasado aproximadamente θ .

A la vista de los resultados se puede concluir que no hay una influencia directa de la profundidad de fisura y la orientación de la masa excéntrica en el FIT, sino que existe también una influencia de la posición de la fisura en el whirling.

5.4.3 *Comparación del FIT estático y FIT dinámico*

A continuación, en la figura 5.118 se realiza una comparación del FIT obtenido para un caso cuasiestático (parte superior) y un caso dinámico (parte inferior). Los resultados se corresponden con el caso de un eje con una profundidad de fisura $\alpha = 0.5$ y una orientación de la masa excéntrica $\theta = 0^\circ$. Para la comparación del caso dinámico se ha escogido una velocidad de giro distinta de la crítica de valor $p=0.7$.

Para reproducir el giro del eje en el caso estático, se han realizado distintas simulaciones girando el sistema rotor cada $\phi = 45^\circ$ hasta completar una vuelta.

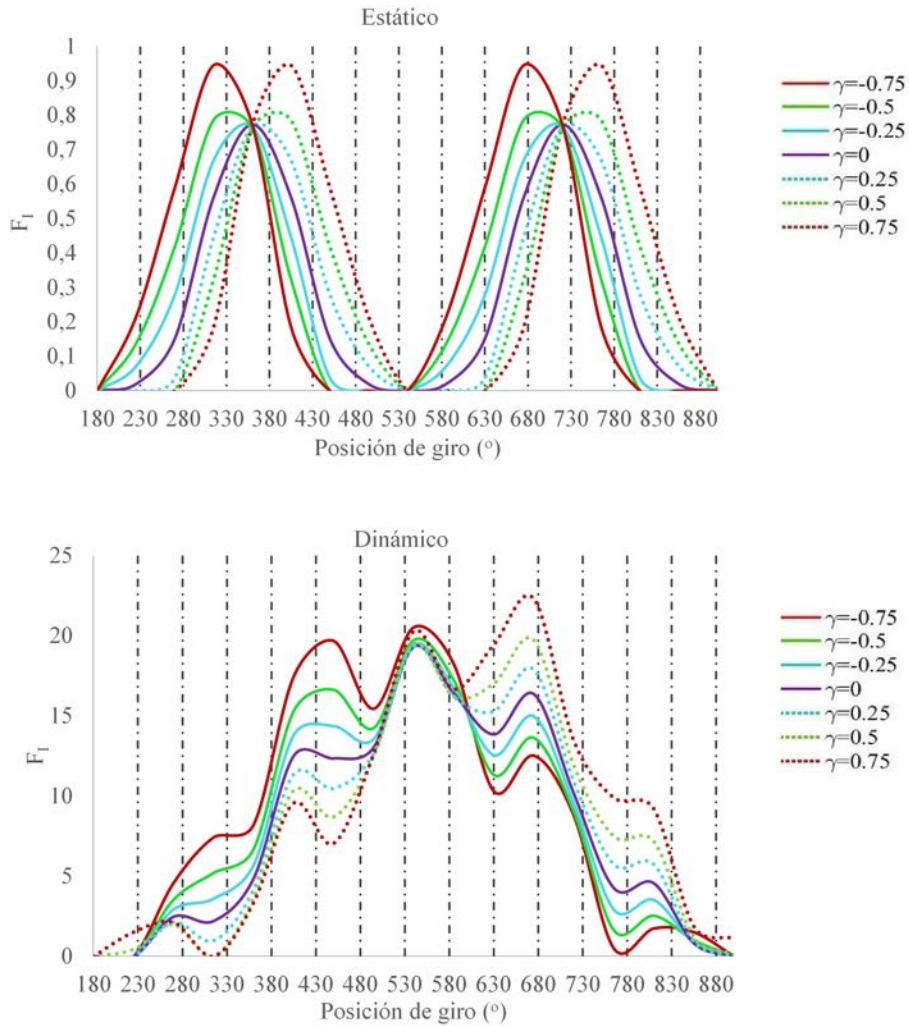


Figura 5.118: Comparación del FIT estático y dinámico $\alpha = 0.5$ y $\theta = 0^\circ$.

En primer lugar, se observan grandes diferencias en cuanto al valor máximo del FIT, ya que en el caso dinámico es 23 y en el estático 1, por lo que el FIT dinámico del sistema rotor analizado cuando gira a una velocidad de giro de $p=0.7$ es 23 veces mayor que el FIT estático. En la figura 5.119 se muestra el FIT calculado para un caso estático y un caso dinámico concretos. En ella se observa que no existe una relación directa entre unos resultados y otros.

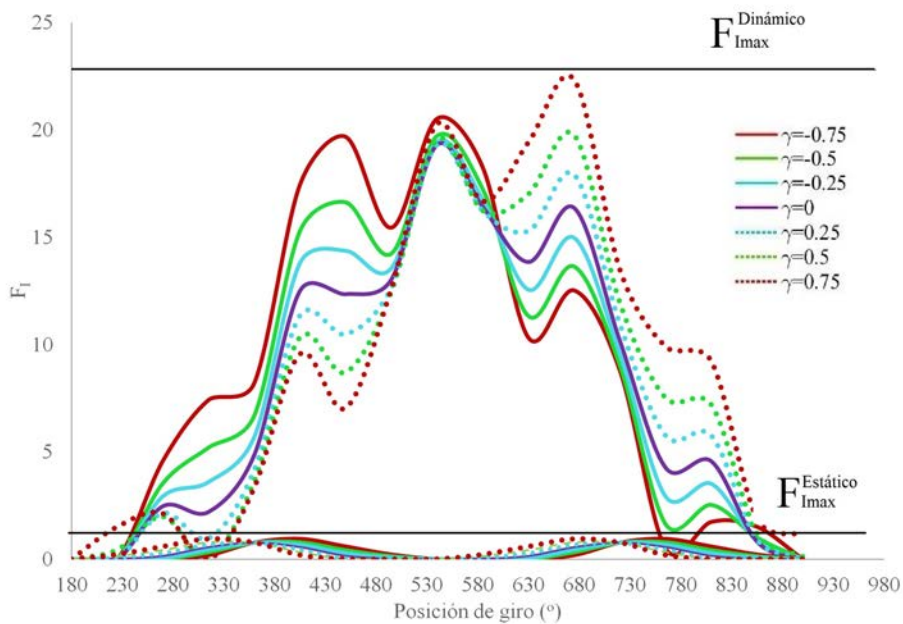


Figura 5.119: Comparación del FIT cuasiestático y el dinámico a $p=0.7$ para $\alpha = 0.5$ y $\theta = 0^\circ$.

Además, se puede ver como la apertura y cierre de la fisura no es la misma para las distintas posiciones de giro, ya que teniendo en cuenta los resultados anteriores, esta varía en función de la velocidad de giro y en el caso estático lo único que se tiene en cuenta es el peso del sistema rotor.

Por tanto, la utilización del FIT calculado en ejes en condiciones estáticas no permite conocer el comportamiento dinámico de los ejes fisurados.

6

CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

En este sexto capítulo se exponen las conclusiones obtenidas a lo largo de todo el trabajo realizado, tanto de la parte experimental como de la numérica. Después se plantean los desarrollos futuros.

6.1 CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha realizado un estudio experimental y numérico del comportamiento dinámico de un eje fisurado, del que se han obtenido las siguientes conclusiones:

Resultados experimentales

- Se han llevado a cabo ensayos experimentales en ejes previamente entallados y/o fisurados, con distintos tamaños de fisura y distintas orientaciones de la masa excéntrica. De estos ensayos se han obtenido dos tipos de resultados, órbitas y espectro de las frecuencias, con los que se ha podido caracterizar el comportamiento de un eje fisurado, pudiendo determinar así la presencia de la fisura. Se han analizado las formas de las órbitas de tres velocidades subcríticas $\frac{1}{2}\omega_c$, $\frac{1}{3}\omega_c$ y $\frac{1}{4}\omega_c$ lo que ayuda a la correcta identificación de la fisura, ya que el análisis de únicamente $\frac{1}{2}\omega_c$ y $\frac{1}{3}\omega_c$ puede dar lugar a conclusiones erróneas dado que en dichas velocidades el sistema rotor se comporta de forma similar cuando se presentan otros defectos como por ejemplo el desalineamiento o la asimetría del rotor. Se ha estudiado la influencia de la orientación de la masa excéntrica sobre las órbitas, el espectro de frecuencias y orientación de las playas de fatiga que se forman en el frente de fisura.
- **Se ha encontrado una relación entre el número de lazos interiores $n-1$ de la órbita y el cociente entre las amplitudes de los armónicos $\frac{A_1}{A_n}$, siendo esta relación una de las aportaciones de esta Tesis.**
- Se ha presentado un **procedimiento para el cálculo de la velocidad crítica a partir del cociente entre las amplitudes de los armónicos $\frac{A_1}{A_n}$** , que permite la identificación de la fisura de forma más exacta que la simple observación de los cambios de las órbitas. Esta conclusión se considera una de las aportaciones de esta Tesis Doctoral.
- **Se ha presentado una metodología que permite obtener el tamaño de la fisura a partir de la velocidad crítica**, siendo esta una aportación de la presente Tesis Doctoral.

Resultados numéricos

- **Se ha desarrollado un modelo numérico 3D dinámico de un eje fisurado simulando un Jeffcott Rotor modificado y que presenta un desequilibrio**

producido por una masa excéntrica, mediante el Método de los Elementos Finitos (MEF) utilizando el código comercial Abaqus. Se ha simulado el giro a distintas velocidades y se han analizado 16 vueltas completas hasta llegar a la estabilidad de los resultados para casos con distintas profundidades de fisura y distintas orientaciones de la excentricidad. Se han estudiado las órbitas descritas por la sección fisurada.

- **Se ha validado el modelo numérico** con los resultados experimentales mostrados en este trabajo y con los de otros autores de la literatura.
- **Se ha calculado el FIT a lo largo del frente de la fisura durante un giro del eje en condiciones dinámicas.** En conocimiento de la autora, anteriormente no se ha llevado a cabo un estudio del FIT en un modelo numérico 3D dinámico, lo que supone una aportación en esta Tesis.
- El valor del FIT se ha calculado a partir del método de los desplazamientos de los puntos a ambos lados de la fisura para distintas velocidades de giro, obteniéndose resultados para un ciclo completo de giro (una o dos vueltas dependiendo de la velocidad de giro).
- Se observa de forma general que la apertura y cierre de la fisura y el valor del FIT dependen de la posición de la fisura en la órbita que a su vez depende conjuntamente de la velocidad de giro a la que se encuentre el rotor, de la profundidad de fisura y de la orientación de la masa excéntrica.
- Se ha observado que según varía la orientación de la masa excéntrica se produce un desfase en los resultados del FIT durante una vuelta del eje.
- Se han comparado los resultados del FIT obtenidos en un caso cuasiestático y otro dinámico a una velocidad de giro distinta de $\frac{1}{n}\omega_c$. De esta comparación se concluye que el FIT máximo de un caso concreto será mayor en una situación dinámica, dependiendo su valor de la velocidad de giro.
- **El FIT será mayor en situaciones dinámicas que en estáticas** no siendo aplicable el FIT en condiciones estáticas al comportamiento dinámico de ejes giratorios.

6.2 DESARROLLOS FUTUROS

A partir de los resultados y conclusiones obtenidos en el presente trabajo se plantean los siguientes desarrollos futuros:

- Extender este estudio a velocidades supercríticas, tanto experimental como numéricamente.
- Extender el estudio numérico a velocidades distintas de las críticas.
- Analizar el comportamiento dinámico en rotores que presenten fisuras con formas de frente distintas y que estén sometidos a otro tipo de sollicitaciones como torsión, tracción o la combinación de ellas.
- Analizar en detalle la influencia combinada en el FIT de los parámetros posición de la fisura en el whirling, velocidad de giro Ω , la profundidad de fisura α y la orientación de la masa excéntrica θ .
- Establecer una expresión del FIT en función de la velocidad de giro Ω , la profundidad de fisura α y la orientación de la masa excéntrica θ .
- Realizar un estudio de la propagación de la fisura contenida en un eje giratorio.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] W Rankine, «On the centrifugal force of rotating shaft», *The Engineer*, vol. 27, pág. 249, 1869.
- [2] S Dunkerley, «On the whirling and vibrations of shafts», *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. A*, vol. 185, págs. 279-360, 1894.
- [3] S. Y. et al., *Control of surge in centrifugal compressors by active magnetic bearings*. Springer-Verlag, 2013.
- [4] H Jeffcott, «The lateral vibration of loaded shafts in neighbourhood of a whirling speed: The effect of want of balance», *Philosophical Magazine, Ser. 6*, vol. 37, págs. 304-314, 1919.
- [5] A Foppl, «Das problem der lavalschen turbinenwelle», *Der Civillingenieur*, vol. 4, págs. 335-342, 1895.
- [6] R Gasch, «Dynamic behavior of a simple rotor with a cross-sectional crack», *Vibrations in rotating machinery, ImechE Conference paper*, (1976),
- [7] A Darpe, K Gupta y A Chawla, «Transient response and breathing behaviour of a cracked jeffcott rotor», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 272, págs. 207-243, 2004.
- [8] R Gasch, «A survey of the dynamic behavior of a simple rotating shaft with a transverse crack», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 160, págs. 313-332, 1993.
- [9] A Dimarogonas y C Papadopoulos, «Vibrations of cracked shafts in bending», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 91, págs. 583-593, 1983.
- [10] C Papadopoulos, «The strain energy release approach for modeling cracks in rotors: A state of the art review», *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 22, págs. 763-789, 2008.
- [11] T Patel y A Darpe, «Influence of crack breathing model on nonlinear dynamics of a cracked rotor», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 311, págs. 953-972, 2008.
- [12] M Lalanne y G Ferraris, *Rotordynamics: Prediction in engineering*, 2nd. Wiley y Sons, 1990.

- [13] F Ehrich, *Handbook of rotordynamics*. McGraw-Hill, 1992.
- [14] A Muszynska, *Rotordynamics*. Taylor y Francis, 2005.
- [15] Y Ishida y T Yamamoto, *Linear and nonlinear rotordynamics*, 2nd. Wiley-VCH, 2012.
- [16] A. Muszynska, «Misalignment and shaft crack-related phase relationships for 1x and 2x vibration components of rotor responses.», *Orbit*, vol. 10, págs. 4-8, 1989.
- [17] C.-W. Lee., *Vibrations analysis of rotors*. Springer, 1993.
- [18] P Goldman y A Muszynska, «Application of full spectrum to rotating machinery diagnostics», *Orbit*, vol. 20, págs. 17-21, 1999.
- [19] P. Girdhar y C. Scheffer, *Practical machinery vibration analysis and predictive maintenance*. Newnes, 2004.
- [20] *Vibration diagnostics*, 2012.
- [21] J. Alsalaet, «Vibration analysis and diagnostic guide», *3rd International Conference on Material, Mechanical and Manufacturing Engineering*, 2012.
- [22] G. Sabnavis, R. Gordon, M. Kasarda y D. Quinn, «Cracked shaft detection and diagnostics: A literature review», *The Shock and Vibration Digest*, vol. 36, pág. 287, 2004.
- [23] C. Gou, J. Yan y W. Yang, «Crack detection for a jeffcott rotor with a transverse crack: An epexperimental investigation», *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 83, págs. 260-271, 2017.
- [24] N Bachschmid, P Pennacchi y E Tanzi, *Cracked rotors: A survey on static and dynamic behaviour including modelling and diagnosis*. Springer, 2010.
- [25] C Papadopoulos y A Dimarogonas, «Coupled longitudinal and bending vibrations of a rotating shaft with an open crack», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 117, págs. 81-93, 1987.
- [26] —, «Coupled longitudinal and bending vibrations of a cracked shaft», *Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design*, vol. 110, págs. 1-8, 1988.
- [27] J Sinou, «Effects of a crack on the stability of a non-linear rotor system», *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 42, págs. 959-972, 2007.
- [28] —, «Experimental response and vibrational characteristics of a slotted rotor», *Commun Nonlinear Science and Numererical Simulation*, vol. 14, págs. 3179-3194, 2009.

- [29] J Wauer, «On the dynamics of cracked rotors: A literature survey», *Applied Mechanical Reviews*, vol. 43, págs. 13-17, 1990.
- [30] A Dimarogonas, «Vibration of cracked structures: A state of the art review», *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 55, págs. 831-857, 1996.
- [31] R Chan y T Lai, «Digital simulation of a rotating shaft with a transverse crack», *Appl. Math. Modelling*, vol. 19, 1995.
- [32] O Salawu, «Detection of structural damage through changes in frequency: a review», *Engineering Structures*, vol. 19, págs. 718-723, 1997.
- [33] *Some results in model based transverse crack identification in rotor systems*, 2000.
- [34] J Sinou y A Lees, «The influence of cracks in rotating shafts», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 285, págs. 1015-1037, 2005.
- [35] M Al-Shudeifat, E Butcher y C Stern, «General harmonic balance solution of a cracked rotor-bearing-disk system for harmonic and sub-harmonic analysis: Analytical and experimental approach», *International Journal of Engineering Science*, vol. 48, págs. 921-935, 2010.
- [36] M Al-Shudeifat y E Butcher, «New breathing functions for the transverse breathing crack of the cracked rotorsystem: Approach for critical and sub-critical harmonic analysis», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 30, págs. 526-544, 2011.
- [37] L. Rubio y J. Fernández-Sáez, «A new efficient procedure to solve the nonlinear dynamics of a cracked rotor», *Nonlinear Dyn*, vol. 70, págs. 1731-1745, 2012.
- [38] I Mayes y W Davies, «Analysis of the response of a multi-rotor-bearing system containing a transverse crack in a rotor», *Journal of Vibration, Acoustics, Stress, and Reability in Design*, vol. 106, págs. 139-145, 1984.
- [39] N Bachschmid, P Pennacchi y E Tanzi, «Some remarks on breathing mechanism, on non-linear effects and on slant and helicoidal cracks», *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 22, págs. 879-904, 2008.
- [40] P Rubio, «Factor de intensidad de tensiones en fisuras elípticas con mecanismo de apertura y cierre en ejes giratorios», Tesis doct., Universidad Carlos III de Madrid, 2014.
- [41] M. van Osch, «Rotor dynamics of a centrifugal pump», Technische Universiteit Eindhoven, inf. téc., 2006.

- [42] C. Rodríguez y V. Steffen, «Diagnosis of cracked shafts by monitoring the transient motion response», *Proceedings of the XII International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics*, 2007.
- [43] L. N. Virgin, J. D. Knight y R. H. Plaut, «A new method for predicting critical speeds in rotordynamics», *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, 2016.
- [44] S. E. Arem y M. B. Zid, «On a systematic approach for cracked rotating shaft study: Breathing mechanism, dynamics and instability», *Nonlinear Dynamics*, 2017.
- [45] P Varney e I Green, «Rotordynamic crack diagnosis: Distinguishing crack depth and location», *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power*, vol. 135, págs. 1-8, 2013.
- [46] *Effect of crack on natural frequency in rotor system*, 2017.
- [47] A Griffith, «The phenomena of rupture and flow in solids», *Philosophical Transactions, Series A*, vol. 221, págs. 163-198, 1920.
- [48] G Irwin, «Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate», *Journal of Applied Mechanics, ASME*, vol. 24, págs. 361-364, 1957.
- [49] T. Anderson, *Fracture mechanics. fundamentals and applications*. CRC Press, 1995.
- [50] A Levan y J Royer, «Part-circular surface cracks in round bars under tension, bending and twisting», *International Journal of Fracture*, vol. 61, págs. 71-99, 1993.
- [51] Y Shih y J Chen, «The stress intensity factor study of an elliptical cracked shaft»,
- [52] A Carpinteri, «Stress intensity factors for straight-fronted edge cracks in round bars», *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 42, págs. 1035-1040, 1992.
- [53] —, «Elliptical-arc surface cracks in round bars», *Fatigue Fracture of Engineering Materials*, vol. 15, págs. 1141-1153, 1992.
- [54] Y Shih y J Chen, «Analysis of fatigue crack growth on a cracked shaft», *International Journal of fracture*, vol. 19, págs. 477-485, 1997.
- [55] M Fonte, E. Gomes y M. Freitas, «Stress intensity factors for semi-elliptical surface cracks in round bars subjected to mode i (bending) and mode iii (torsion) loading», *International Conference on Biaxial/Multiaxial Fatigue and Fracture*, págs. 29-41, 1997.

- [56] T Lorentzen, N Kjaer y T Henriksen, «The application of fracture mechanics to surface cracks in shafts», *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 23, págs. 1005-1014, 1986.
- [57] M Fonte y M Freitas, «Semi-elliptical fatigue crack growth under rotating or reversed bending combined with steady torsion», *Fat. Fract. Eng. Mat. Struct.*, vol. 20, págs. 895-906, 1997.
- [58] A Carpinteri, «Surface flaws in cylindrical shafts under rotary bending», *Fatigue Fracture of Engineering Materials*, vol. 21, págs. 1027-1035, 1998.
- [59] C Shin y C Cai, «Experimental and finite element analyses on stress intensity factors of an elliptical surface crack in a circular shaft under tension and bending», *International Journal of fracture*, vol. 129, págs. 239-264, 2004.
- [60] R. Avilés, *Análisis de fatiga en máquinas*. Ediciones Paraninfo, S.A., 2005.
- [61] A. Andrade, W. Mosquera y L. Vanegas, «Models of fatigue crack growth», *Entre Ciencia e Ingeniería*, vol. 18, págs. 39-48, 2015.
- [62] P. Paris y F. Erdogan, «A critical analysis of crack propagation laws», *Transactions of the ASME-Journal of Basic Engineering*, vol. 85, págs. 528-534, 1963.
- [63] J Toribio, J Matos, B González y J Escuadra, «Numerical modelling of crack shape evolution for surface flaws in round bars under tensile loading», *Engineering Failure Analysis*, vol. 16, págs. 618-630, 2009.
- [64] C. G. et al., «Application of empirical mode decomposition to a jeffcott rotor with a breathing crack», *Journal of Sound and Vibration*, vol. 332, págs. 3881-3892, 2013.
- [65] ABAQUS, *Abaqus theory manual, version 6.13*, 2013.
- [66] J Sinou, «Non-linear dynamics and contacts of an unbalanced flexible rotor supported on ball bearings», *Mechanism and Machine Theory*, vol. 44, págs. 1713-1732, 2009.
- [67] C. Xiaoming, D. Jin y L. Yungui, «Mass proportional damping in nonlinear time-history analysis», *3rd International Conference on Material, Mechanical and Manufacturing Engineering*, 2015.
- [68] A Carpinteri, «Elliptical-arc surface cracks in round bars», *Fatigue Fracture of Engineering Materials*, vol. 15, págs. 1141-1153, 1992.
- [69] A Carpinteri y R Brighenti, «Part-through cracks in round bars under cyclic combined axial and bending loading», *International Journal of Fatigue*, vol. 18, págs. 33-39, 1996.

- [70] N Couroneau y J Royer, «Simplified model for the fatigue growth analysis of surface cracks in round bars under mode I», *International Journal of Fatigue*, vol. 20, págs. 711-718, 1998.